COMCA

Caos en Intervalos

Klisman TejadaFleck

Univesidad Nacional San Agustin

COMCA 2019

Los Sistemas dinamicos Caoticos has recibido una gran atencion estos ultimos anos. Aunque no aya una definicon matematica universal que sea aceptada. Un texto pupular es el Devaney que aisla tres componentes como caracteristicas esenciales del Caos.

Definición

Están formados por las aplicaciones continuas $f : X \to X$ en algunos espacios métricos X

1. f ***es transitiva***, *es decir, para cada subespacio abierto distinto del vacío U y V de X que existe un numero natural k tal que $f^k(U) \cap V$ es distinto de vacío.*
2. f ***es denso periódicamente***, *es decir, los puntos periódicos de f forman un subconjunto denso en X.*
3. ***Dependencia sensitiva de las condiciones iniciales***; *f verifica esta propiedad si hay un número positivo δ (constante de sensitividad) de tal manera que para cada punto $x \in X$ y cada vecindad V de x, existe un punto $y \in V$ y un número entero no negativo n talque $|f^n(x) - f^n(y)| \geq \delta$*

El objetivo de este trabajo es probar dos resultados elementales pero importantes para el estudio del Caos en Intervalos. Siendo el primero:

Teorema

Si $f : X \to X$ *es transitiva y tiene puntos periodicos densos, entonces* f *tiene una dependencia sencitiva de las condiciones iniciales.*

Observemos que hay un numero $\delta_0 > 0$ tal que para todos los $x \in X$ existe un punto periodico $q \in X$ cuya orbita $O(q)$ esta a una distancia almenos de $\delta_0/2$ desde x. De hecho, elijamos 2 puntos periodicos arbitrarios q_1 y q_2 con orbitas disjuntas $O(q_1)$ y $O(q_2)$. Donde, sea δ_0 la distancia de $O(q_1)$ a $O(q_2)$. Luego, por la desigualdad triangular, cada punto $x \in X$ esta a una distancia de al menos $\delta_0/2$ de una de las orbitas periodicas elegidas.

Mostraremos que f tiene una dependencia sensitiva de las condiciones iniciales con una sensibilidad constante $\delta = \delta_0/8$. Sea x un punto arbitrario de X y sea W una vecindad cualquiera de x. Por el teorema, cualquier punto periodico de f es denso, por lo tanto existe un punto periodico p de X tal que esta en la interseccion $U = W \cap B_\delta(x)$ de W con la bola abierta $B_\delta(x)$ de centro en x y radio δ

Tomemos n como el periodo de p, entonces $p = f^n(p)$. Como se dijo anteriormente existe un punto periodico $q \in X$ cuya orbita $O(q)$ esta a una distancia de al menos 4δ de x.

Establecemos

$$V = \bigcap f^{-i}(B_\delta(f^i(q)))$$

Claramente V es abierto y distinto de vacio y que $q \in V$. Y como f es transitiva, existe un $y \in U$ y un numero natural k tal que $f^k(y) \in V$. Ahora tomemos a j como la parte entera de $k/n + 1$. De aqui que $1 \leq nj - k \leq n$. De donde se puede construir:

$$f^{nj}(y) = f^{nj-k}(f^k(y)) \in f^{nj-k}(V) \subseteq B_\delta(f^{nj-k}(q))$$

De donde $f^{nj}(p) = p$, y con ayuda de la desigualdad triangular,

$$\begin{aligned} d(f^{nj}(p), f^{nj}(y)) &= d(p, f^{nj}(y)) \\ &\geq d(x, f^{nj-k}(q)) - d(f^{nj-k}(q), f^{nj}(y)) - d(p, x) \end{aligned}$$

donde d es la funcion distancia en X. Como se tenia que, $p \in B_\delta(x)$ y $f^{nj}(y) \in B_\delta(f^{nj-k}(q))$ se tiene que:

$$d(f^{nj}(p), f^{nj}(y)) > 4\delta - \delta - \delta = 2\delta$$

De la misma manera se resuelve que

$$d(f^{nj}(x), f^{nj}(y)) > \delta$$

ó

$$d(f^{nj}(x), f^{nj}(p)) > \delta$$

Para cualquier caso, se a encontrado un punto $y \in W$ cuya nj-esima iteración es mas que la distancia δ desde $f^{nj}(x)$