Dúvida do Float (Laplaciano em coordenadas cilíndricas)

Luiz Votto

Novembro 2019

Em coordenadas cartesianas, o divergente de um campo vetorial $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z. \tag{1}$$

Entretanto, em coordenadas cilíndricas, os versores $\hat{\rho}$ e $\hat{\phi}$ dependem da coordenada ϕ:

$$\partial_\phi \hat{\rho} = \partial_\phi(\cos\phi \hat{\mathbf{x}} + \sin\phi \hat{\mathbf{y}}) = -\sin\phi \hat{\mathbf{x}} + \cos\phi \hat{\mathbf{y}} = \hat{\phi}, \tag{2}$$

$$\partial_\phi \hat{\phi} = \ldots = -\hat{\rho}. \tag{3}$$

As outras derivadas de versores são nulas. Tendo isto em mente, fazemos o divergente lembrando de tomar as derivadas **antes** de multiplicar. Assim,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \left(\hat{\rho}\partial_\rho + \hat{\phi}\frac{1}{\rho}\partial_\phi + \hat{z}\partial_z\right) \cdot \left(\hat{\rho}A_\rho + \hat{\phi}A_\phi + \hat{z}A_z\right) \tag{4}$$

$$= \hat{\rho} \cdot \Big(\partial_\rho(\hat{\rho}A_\rho) + \partial_\rho(\hat{\phi}A_\phi) + \partial_\rho(\hat{z}A_z)\Big) \tag{5}$$

$$+ \frac{\hat{\phi}}{\rho} \cdot \Big(\partial_\phi(\hat{\rho}A_\rho) + \partial_\phi(\hat{\phi}A_\phi) + \partial_\phi(\hat{z}A_z)\Big) \tag{6}$$

$$+ \hat{z} \cdot \Big(\partial_z(\hat{\rho}A_\rho) + \partial_z(\hat{\phi}A_\phi) + \partial_z(\hat{z}A_z)\Big). \tag{7}$$

Lembrando que a derivada numa coordenada v do produto de duas funções f e g que dependem de v é

$$\partial_v(fg) = \partial_v(f)g + \partial_v(g)f = g\partial_v f + f\partial_v g, \tag{8}$$

logo

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \hat{\rho} \cdot \left(\hat{\rho} \partial_\rho A_\rho + \hat{\phi} \partial_\rho A_\phi + \hat{z} \partial_\rho A_z \right) \tag{9}$$

$$+ \frac{\hat{\phi}}{\rho} \cdot \left((A_\rho \partial_\phi \hat{\rho} + \hat{\rho} \partial_\phi A_\rho) + \left(A_\phi \partial_\phi \hat{\phi} + \hat{\phi} \partial_\phi A_\phi \right) + \hat{z} \partial_\phi A_z \right) \tag{10}$$

$$+ \hat{z} \cdot \left(\hat{\rho} \partial_z A_\rho + \hat{\phi} \partial_z A_\phi + \hat{z} \partial_z A_z \right) \tag{11}$$

$$= \left(\partial_\rho A_\rho + \frac{1}{\rho} A_\rho \right) + \frac{1}{\rho} \partial_\phi A_\phi + \partial_z A_z \tag{12}$$

$$= \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \partial_\phi A_\phi + \partial_z A_z. \tag{13}$$

Como o laplaciano de um campo escalar $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é dado por

$$\nabla^2 \varphi = \nabla \cdot \nabla \varphi \tag{14}$$

$$= \nabla \cdot \left(\hat{\rho} \partial_\rho \varphi + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \partial_\phi \varphi + \hat{z} \partial_z \varphi \right) \tag{15}$$

$$= \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \partial_\rho \varphi) + \frac{1}{\rho^2} \partial_\phi^2 \varphi + \partial_z^2 \varphi. \tag{16}$$

O raciocínio para coordenadas esféricas é análogo
E FICA COMO EXERCÍCIO [1].

[1] É brincadeira. ☺