Een spiraal van rechthoeken rond een vierkant

Luc Van den Broeck

12 juli 2017

Samenvatting

Sinds enkele jaren ben ik op zoek naar eenvoudige wiskundige en fysische problemen die onverwacht gerelateerd zijn met het getal π. In *The bouncing balls and pi* beschreef ik eerder al hoe de opeenvolgende decimalen van π kunnen berekend worden door twee ballen volledig elastisch tegen elkaar en tegen een muur te laten botsen. In dit artikel zal ik aantonen hoe het getal π tevoorschijn komt door een oneindige serie rechthoeken met oppervlakte 1 spiraalsgewijze aan elkaar te kleven. In een veralgemening van dit probleem duikt op een natuurlijke wijze de gammafunctie en de formule van Stirling op.

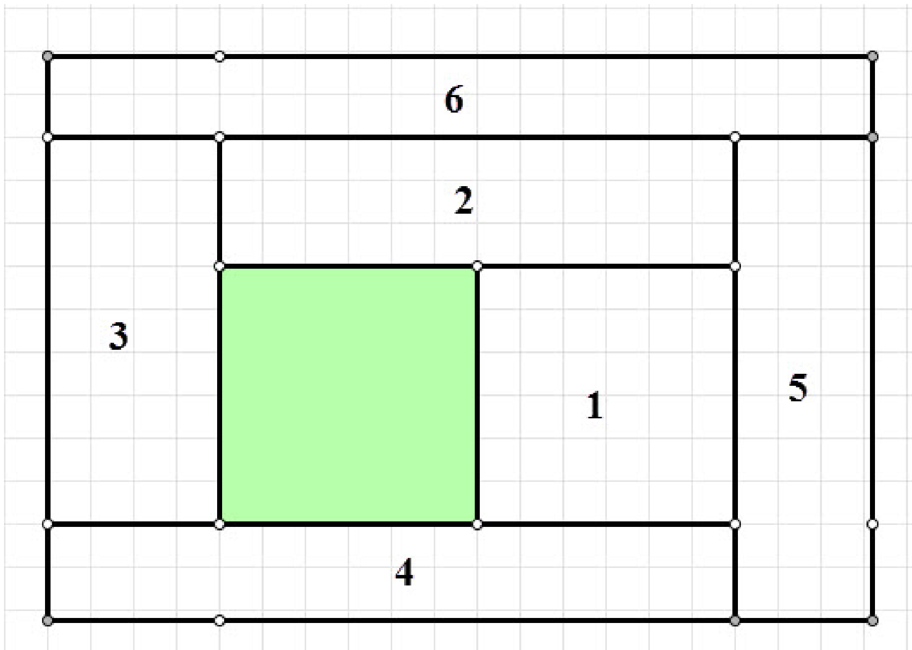
1 Probleemstelling

Het volgend probleem ontleende ik aan MindYourDecisions, het wiskundige videokanaal van Presh Talwalkar op YouTube. Hoewel de formulering van het probleem enkel eenvoudige meetkunde bevat, werd de oplossing op de website aangekondigd als zeer pittig. In vrije vertaling kan het probleem als volgt geformuleerd worden.

> Neem een vierkant stuk karton met een oppervlakte van 1 dm^2. Kleef hierrond een spiraal van kartonnen rechthoeken die alle een oppervlakte hebben van 1 dm^2: eerst aan de rechterkant, daarna bovenaan, vervolgens links, dan onder, vervolgens weer rechts, ... Na elke toevoeging van een rechthoek moet het geheel er weer uit zien als een rechthoek (zie figuur 1). Bepaal onder deze omstandigheden de limiet van de breedte-hoogte-verhouding van de samengestelde rechthoek.

Om deze limietverhouding te berekenen, gaan we eerst proefondervindelijk te werk. Aangezien het zijdelings aankleven van een rechthoek wiskundig een beetje afwijkt van het boven- of onderaan aankleven, zullen we in één stap simultaan stwee rechthoeken aankleven. Met de nummering van figuur 1 nemen we eerst de rechthoeken 1 en 2 samen, vervolgens de rechthoeken 3 en 4, daarna 5 en 6 enz.

Rechthoek 1 heeft de vorm van een eenheidsvierkant. Rechthoek 2 heeft breedte 2. Om een oppervlakte van 1 dm^2 te verkrijgen moet de hoogte gelijk



Figuur 1: Een spiraal van rechthoeken rond een vierkant

zijn aan $\frac{1}{2}$. Na uitbreiding met deze twee rechthoeken, vinden we een totale breedte die gelijk is aan 2 en een totale hoogte die gelijk is aan $\frac{3}{2}$. De breedte-hoogte-verhouding van de samengestelde rechthoek is dan $\frac{4}{3}$.

Rechthoek 3 heeft een hoogte die gelijk is aan $\frac{3}{2}$. De breedte is bijgevolg gelijk aan $\frac{2}{3}$ want de oppervlakte van elke rechthoek is 1. Hierna kunnen we de breedte van rechthoek 4 berekenen. Die is gelijk aan $\frac{8}{3}$. Omdat ook deze rechthoek oppervlakte 1 heeft, moet de hoogte gelijk zijn aan $\frac{3}{8}$. De samengestelde rechthoek heeft na twee uitbereidingsronden een breedte van $\frac{8}{3}$ en een hoogte van $\frac{15}{8}$. De breedte-hoogte-verhouding is nu gelijk aan $\frac{64}{45}$.

Zonder de gave van de helderziendheid is het vrijwel onmogelijk om het rijtje dat begint met de breuken $\frac{4}{3}$ en $\frac{64}{45}$ verder te zetten. Zelfs na de berekening van de volgende term, $\frac{256}{175}$, zal de regelmaat wellicht niet duidelijk worden. Daarom proberen we in dit verslag eerst een recursieformule op te stellen voor de opeenvolgende termen van deze rij van breedte-hoogte-verhoudingen. Deze betrekking zal volstaan om de breedte-hoogteverhouding in de limietsituatie te berekenen.

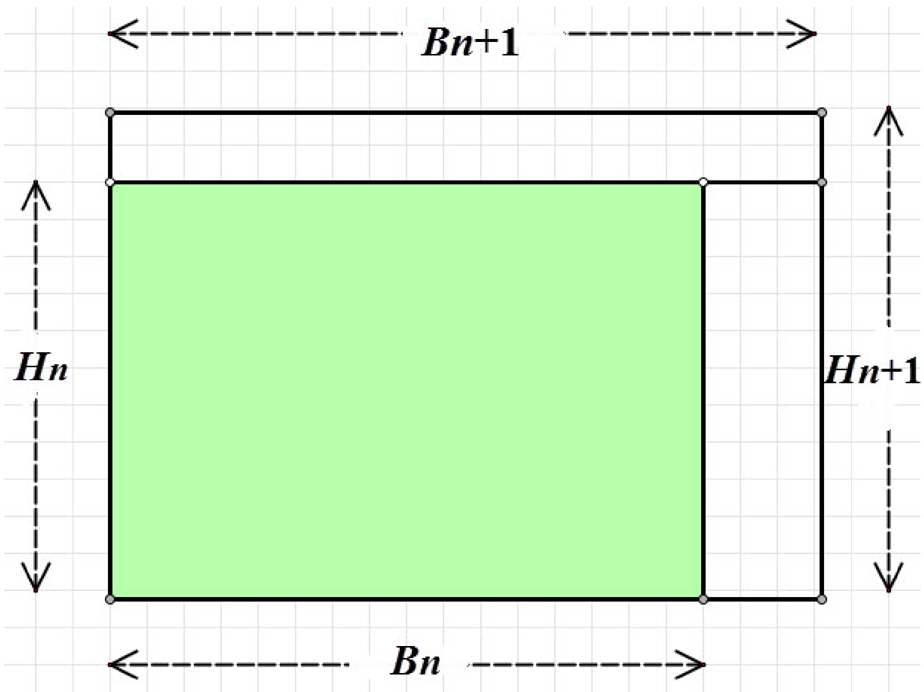
2 Recursieformule

In figuur 2 worden twee opeenvolgende rechthoeken van het iteratieproces afgebeeld. De kleinste heeft breedte B_n en hoogte H_n en de grootste heeft breedte

B_{n+1} en hoogte H_{n+1}.Vooraleer we een formule zullen afleiden voor de opeenvolgende verhoudingen $\frac{B_n}{H_n}$, bestuderen we eerst de oppervlakte $B_n \cdot H_n$ van deze rechthoeken.

De allereerste rechthoek heeft een oppervlakte die gelijk is aan 1. Per iteratiestap worden er twee rechthoeken met een oppervlakte 1 toegevoegd. De rij van de oppervlakten van de samengestelde rechthoeken is dus een rekenkundige rij met een verschil gelijk aan 2. In formulevorm noteren we deze rij als:

$$B_n \cdot H_n = 2n - 1. \tag{1}$$



Figuur 2: Twee opeenvolgende rechthoeken

De rechthoek die aan de rechterkant aangekleefd wordt, heeft een hoogte H_n en een breedte $\frac{1}{H_n}$. Hieruit volgt dat:

$$B_{n+1} = B_n + \frac{1}{H_n} = \frac{B_n \cdot H_n + 1}{H_n}.$$

In combinatie met formule (1) geeft dit de eerste recursiebetrekking:

$$B_{n+1} = \frac{2n}{H_n} = \frac{2n}{B_n \cdot H_n} B_n = \frac{2n}{2n-1} B_n \tag{2}$$

De rechthoek die boven aangekleefd is, heeft een breedte die gelijk is aan $\frac{2n}{H_n}$. De hoogte van deze rechthoek is dus gelijk aan $\frac{H_n}{2n}$. Hieruit kunnen we een tweede recursieformule afleiden:

$$H_{n+1} = H_n + \frac{H_n}{2n} = \frac{2n+1}{2n} H_n \tag{3}$$

Door de formule (2) te delen door (3) vinden we de uiteindelijke recursieformule voor breedte-hoogte-verhoudingen:

$$V_{n+1} = \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdot V_n \tag{4}$$

3 Limietverhouding

Het aangroeiproces met de kartonnen rechthoeken start met een vierkant. De beginverhouding van breedte en hoogte is dus $V_1 = 1$. Als we de recursiebetrekking (4) meermaals na elkaar toepassen vinden we een regelmaat in de opeenvolgende breedte-hoogte-verhoudingen die een duidelijk zicht geeft op de limietverhouding V_∞.

$$\begin{aligned}
V_2 &= \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \\
V_3 &= \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot 1 \\
V_4 &= \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot 1 \\
&\dots \\
V_\infty &= \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{11} \dots
\end{aligned}$$

Wellicht kan je de schoonheid van deze formule smaken. De natuurlijke getallen zijn in kanteelvorm geschikt over de tellers en noemers van de opeenvolgende breuken. Het is echter niet meteen duidelijk of dit oneindige product een eindig of een oneindig getal voorstelt. De productreeks bevat immers afwisselend een breuk die kleiner is dan 1 en een breuk die groter is dan 1. Mochten de breuken groter dan 1 de overhand nemen dan zou het product kunnen divergeren naar ∞. Indien de breuken kleiner dan 1 de overhand zouden nemen, zou het product naar nul kunnen gaan.

In 1655 werd echter door Johan Wallis (1616-1703) bewezen dat deze productreeks convergeert, maar niet naar nul. In zijn belangrijkste werk, Arithmetica infinitorum, toonde hij aan dat deze reeks convergeert naar $\frac{\pi}{2}$. Hiermee is aangetoond dat de limietverhouding van de samengestelde rechthoek gerelateerd is aan het getal π.

4 Veralgemening van het probleem

Als uitbreiding op dit rechthoekenprobleem, lossen we deze vraag op met een andere beginsituatie. Stel dat het aangroeiproces start met een vierkant met oppervlakte $2a$. Zoek dan een formule voor de breedte-hoogte-verhouding van de samengestelde rechthoek na een spiraalsgewijze uitbreiding met oneindig veel rechthoeken met oppervlakte 1.

De methode om de breedte en de hoogte van opeenvolgende rechthoeken te berekenen is volledig analoog aan de methode van het basisprobleem. De formules (1), (2) en (3) worden in deze nieuwe situatie aangepast tot:

$$B_n \cdot H_n = 2n + 2a - 2. \tag{5}$$

$$B_{n+1} = B_n + \frac{1}{H_n} = \frac{2n+2a-1}{H_n} = \frac{2n+2a-1}{B_n \cdot H_n} B_n = \frac{2n+2a-1}{2n+2a-2} B_n \tag{6}$$

$$H_{n+1} = H_n + \frac{H_n}{2n+2a-1} = \frac{2n+2a}{2n+2a-1} H_n \tag{7}$$

Deling van formule (6) door (7) geeft een nieuwe recursieformule voor de opeenvolgende breedte-hoogte-verhoudingen:

$$V_{n+1} = \frac{2n+2a-1}{2n+2a-2} \cdot \frac{2n+2a-1}{2n+2a} \cdot V_n \tag{8}$$

5 Limietverhouding

Door de formule (8) verschillende keren na elkaar toe te passen vanuit de beginverhouding $V_1 = 1$ vinden we de limietverhouding:

$$V_\infty = \frac{2a+1}{2a} \cdot \frac{2a+1}{2a+2} \cdot \frac{2a+3}{2a+2} \cdot \frac{2a+3}{2a+4} \cdot \frac{2a+5}{2a+4} \cdot \frac{2a+5}{2a+6} \cdot \frac{2a+7}{2a+6} \cdot \ldots$$

Om een gesloten formule te vinden voor dit oneindige product (een formule zonder puntjes op het einde), breken we het product voorlopig even af na 7 factoren en vereenvoudigen we deze uitdrukking. Van deze uitdrukking nemen we de limiet waarbij het aantal factoren naar oneindig gaat.

$$\begin{aligned}
&\frac{2a+1}{2a} \cdot \frac{2a+1}{2a+2} \cdot \frac{2a+3}{2a+2} \cdot \frac{2a+3}{2a+4} \cdot \frac{2a+5}{2a+4} \cdot \frac{2a+5}{2a+6} \cdot \frac{2a+7}{2a+6} \\
&= \left(\frac{2a+1}{2a+2} \cdot \frac{2a+3}{2a+4} \cdot \frac{2a+5}{2a+6} \right)^2 \cdot \frac{2a+7}{2a} \\
&= \left(\frac{a+\frac{1}{2}}{a+1} \cdot \frac{a+\frac{3}{2}}{a+2} \cdot \frac{a+\frac{5}{2}}{a+3} \right)^2 \cdot \frac{2a+7}{2a} \\
&= \left(\frac{(a+\frac{5}{2})!}{(a-\frac{1}{2})!} \cdot \frac{a!}{(a+3)!} \right)^2 \cdot \frac{2a+7}{2a} \\
&= \left(\frac{a!}{(a-\frac{1}{2})!} \right)^2 \cdot \frac{2a+7}{2a} \cdot \left(\frac{(a+\frac{5}{2})!}{(a+\frac{6}{2})!} \right)^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{a!}{(a-\frac{1}{2})!}\right)^2 \cdot \frac{a+\frac{7}{2}}{a} \cdot \left(\frac{(a+\frac{5}{2})!}{(a+\frac{6}{2})!}\right)^2 \\
&= \left(\frac{a!}{(a-\frac{1}{2})!}\right)^2 \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{(a+\frac{7}{2})! \cdot (a+\frac{5}{2})!}{(a+\frac{6}{2})! \cdot (a+\frac{6}{2})!}
\end{aligned}
$$

Met het symbool ! bedoelen we de continue uitbreiding van de faculteitsfunctie. Meestal wordt deze continue uitbreiding genoteerd met de gammafunctie: $\Gamma(x+1) = x!$.

Indien we het aantal factoren terug verhogen van 7 tot oneindig dan zal de laatste breuk gelijk worden aan 1. We steunen hierbij op de stelling die we verderop zullen bewijzen:

$$
\lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)! \cdot k!}{(k+\frac{1}{2})! \cdot (k+\frac{1}{2})!} = 1. \tag{9}
$$

Hieruit volgt de eindformule voor de limiet van de breedte-hoogteverhouding van samengestelde rechthoek:

$$
\begin{aligned}
V_\infty &= \left(\frac{a!}{(a-\frac{1}{2})!}\right)^2 \cdot \frac{1}{a} \\
&= \left(\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+\frac{1}{2})}\right)^2 \cdot \frac{1}{a}
\end{aligned} \tag{10}
$$

Ter controle berekenen we de limietverhouding V_∞ voor het basisprobleem waarbij $a = \frac{1}{2}$. We steunen hierbij op de gammawaarden $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ en $\Gamma(1) = 1$ en vinden zo opnieuw dat $V_\infty = \frac{\pi}{2}$.

6 Hulpstelling

Berekeningen van faculteiten van grote getallen komen vaak voor in toegepaste wiskunde bijvoorbeeld in de statistische fysica. In deze context is het wel eens nodig om combinaties of permutaties te nemen van een aantal moleculen gelijk aan het getal van Avogadro. Bij zulke berekeningen wordt er bij voorkeur benaderend gerekend met de formule van Stirling:

$$
n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n. \tag{11}
$$

Voor $n \to \infty$ gaat het quotient van de benaderende en de exacte waarde naar 1. De benadering van Stirling is dus asymptotisch gelijkwaardig met de faculteitsfunctie.

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!} = 1
$$

Deze asymptoische gelijkwaardigheid gebruiken we om stelling (9) aan te tonen.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)!\cdot k!}{(k+\frac{1}{2})!\cdot(k+\frac{1}{2})!} \\
=&\lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi(k+1)}\left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}\cdot\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^{k}}{\sqrt{2\pi(k+\frac{1}{2})}\left(\frac{k+\frac{1}{2}}{e}\right)^{k+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{2\pi(k+\frac{1}{2})}\left(\frac{k+\frac{1}{2}}{e}\right)^{k+\frac{1}{2}}} \\
=&\lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{k(k+1)}\left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}\cdot\left(\frac{k}{e}\right)^{k}}{\sqrt{(k+\frac{1}{2})^2}\left(\frac{k+\frac{1}{2}}{e}\right)^{k+\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{k+\frac{1}{2}}{e}\right)^{k+\frac{1}{2}}} \\
=&\lim_{k\to\infty} \frac{\left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}\cdot\left(\frac{k}{e}\right)^{k}}{\left(\frac{k+\frac{1}{2}}{e}\right)^{k+\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{k+\frac{1}{2}}{e}\right)^{k+\frac{1}{2}}} \\
=&\lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^{k+1}\cdot k^k}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^{k+\frac{1}{2}}\cdot\left(k+\frac{1}{2}\right)^{k+\frac{1}{2}}} \\
=&\lim_{k\to\infty} \left(\left(\frac{k^2+k}{k^2+k+\frac{1}{4}}\right)^{k}\cdot\frac{k+1}{k+\frac{1}{2}}\right) \\
=&\lim_{k\to\infty} \left(\frac{k^2+k}{k^2+k+\frac{1}{4}}\right)^{k} \\
=&\lim_{k\to\infty} \left(1-\frac{1}{(2k+1)^2}\right)^{k} \\
=&1
\end{aligned}
$$

□