Introducción a la teoría del error

Elsa Liliana Guzmán Rincón

1. Un modelo matemático simple

Un modelo matemático se define como una formulación o una ecuación que expresa las características esenciales de un sistema físico o de un proceso en términos matemáticos. Por ejemplo, la Segunda Ley de Newton establece que la razón de cambio del movimiento de un cuerpo, es igual a la fuerza resultante que actúa sobre él.

$$F = ma \tag{1}$$

donde a es la variable independiente, F es la función de fuerza y m es un parámetro de las propiedades del sistema. Despejando a de (1) se obtiene $a = \dfrac{F}{m}$ donde a representa la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo, es decir:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \tag{2}$$

La fuerza neta esta determinada por la atracción de la gravedad (F_D) y la atracción por la resistencia del aire (F_U), por lo tanto, $F = F_D + F_U$, reemplazando en (2) se obtiene:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F_D + F_U}{m}$$

donde $F_D = mg$ y $F_U = -cv$, donde c es el coeficiente de arrastre o resistencia, es decir:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{mg - cv}{m}$$

que genera la ecuación diferencial

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{cv}{m} \tag{3}$$

con solución

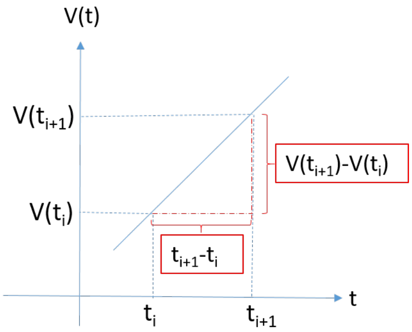
$$v(t) = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{\frac{-c}{m}t}\right) \tag{4}$$

1.1. Problema del paracaidista

Un paracaidista con una masa de $68{,}1kg$ salta de un globo aerostático fijo. Aplique la ecuación (4) para calcular la velocidad antes de que abra el paracaídas. Considere que el coeficiente de resistencia es igual a $12{,}5kg/s$.

Al reemplazar los datos en la ecuación y tabular obtenemos:

$t(s)$	$v(m/s)$
0	0.00
2	16.40
4	27.77
6	35.64
8	41.10
10	44.87
12	47.49
∞	53.39



1.2. Solución numérica

Utilizando el concepto de la pendiente, la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo se puede aproximar mediante

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\delta v}{\delta t} = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \tag{5}$$

que al reemplazarlo en (3), tenemos

$$\frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = g - \frac{cv(t_i)}{m}$$

y al despejar $v(t_{i+1})$ se obtiene

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + \left[g - \frac{c}{m}v(t_i)\right](t_{i+1} - t_i) \tag{6}$$

Esta aproximación se conoce como **método de Euler**, donde $v(t_{i+1})$ corresponde al **valor nuevo**, $g - \frac{c}{m}v(t_i)$ es la **pendiente**, el **tamaño de paso** está dado por $t_{i+1} - t_i$ y $v(t_i)$ corresponde al **valor anterior**. Usando la (6) y los datos para el problema del paracaidista obtenemos:

$t(s)$	$v(m/s)$
0	0.00
2	19.60
4	32.00
6	39.85
8	44.82
10	47.97
12	49.96
∞	53.39

Referencias

Chapra, S. C. (2015), *Métodos numéricos para ingenieros*, McGrawHillEducation.