Principio de Identidad y del Argumento

Diego A. Londoño P.

Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales

Octubre 30, 2018

Contenido

Preliminares

Curvas homotópicas

Supongamos que $\gamma_0 : [0,1] \to G$ y $\gamma_1 : [0,1] \to G$ son dos curvas continuas de z_0 a z_1 en un conjunto G. Decimos que γ_0 es homotópica con puntos finales fijos a γ_1 si existe una función continua $H : [0,1]^2 \to G$ tal que

(i) $H(0,t) = \gamma_0$ para $0 \leq t \leq 1$.

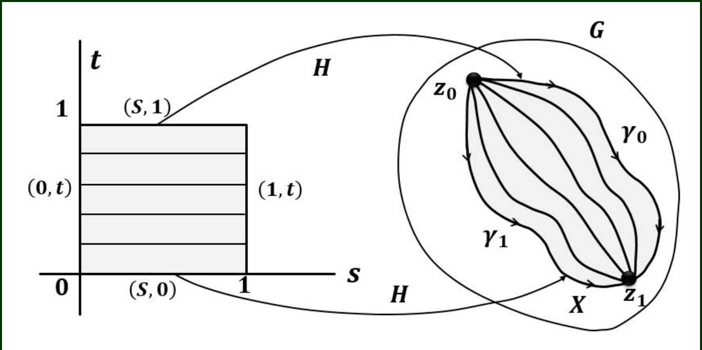
(ii) $H(1,t) = \gamma_1$ para $0 \leq t \leq 1$.

(iii) $H(s,0) = z_0$ para $0 \leq s \leq 1$.

(iv) $H(s,1) = z_1$ para $0 \leq s \leq 1$.

Por otro lado, si las condiciones (III) y (IV) se exige que $H(s,0) = H(s,1)$ para todo $s \in [0,1]$, decimos que γ_0 y γ_1 son homotópicas como curvas cerradas en G.

Preliminares

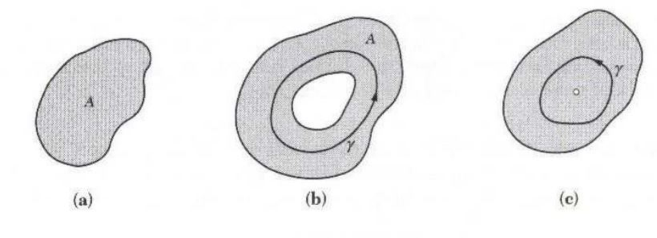


Representación gráfica de una homotopía entre γ_0 y γ_1

Preliminares

Conjunto simplemente conexo

Un conjunto conexo G es llamado simplemente conexo si cada curva cerrada γ en G es homotópica (como curva cerrada) a un punto en G, esto es al aguna curva constante $\overline{\gamma}(t) = z_0 \in G$

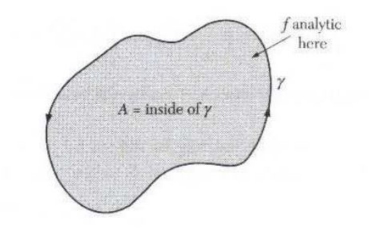


Preliminares

Teorema de Cauchy

Dada una función analítica f en una región G y γ una curva cerrada en G la cual es homotópica a un punto en G. Entonces

$$\int_\gamma f = 0$$



Preliminares

Teorema de deformación

Supongamos que f es una función analítica sobre un conjunto abierto G y que γ_0 y γ_1 son curvas suaves a trozos en G.

(i) Si γ_0 y γ_1 son trayectorias de z_0 a z_1 y son homotópicas en G con puntos finales fijos, entonces:

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f.$$

(ii) Si γ_0 y γ_1 son curvas cerradas homotópicas como curvas cerradas en G, entonces

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$$

Preliminares

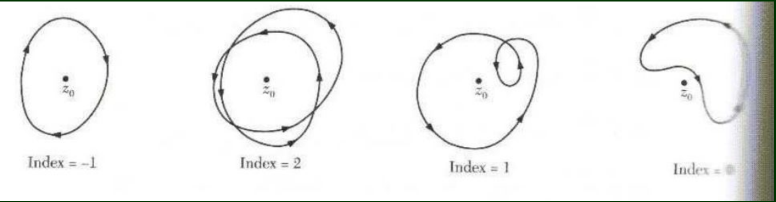
Definición (Índice de una curva)

Dada γ una curva cerrada en $\mathbb{C}$ y $z_0 \in \mathbb{C}$ un punto que no esté en γ se define el índice de γ con respecto a z_0 por

$$I(\gamma; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$$

Decimos que γ *se enrolla alrededor* de z_0, $I(\gamma; z_0)$ veces.

Observación: Si z_0 no se encuentra en $\tilde{\gamma}_0$ o γ_1 y si $\tilde{\gamma}_0$ y $\tilde{\gamma}_1$ son homotópicas en $\mathbb{C} - \{z_0\}$ entonces $I(\tilde{\gamma}_0; z_0) = I(\gamma; z_0)$



Preliminares

Teorema (Fórmula integral de Cauchy)

Dada f una función analítica sobre una región A y γ una curva cerrada en A que es homotópica a un punto, y sea $z_0 \in A$ un punto que no esté en γ. Entonces

$$f(z_o)I(\gamma; z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}dz$$

Preliminares

Diferenciabilidad de Integrales del tipo Cauchy

Supongamos que γ es una curva en $\mathbb{C}$ y g es una función continua definida a lo largo de la imagen $\gamma([a,b])$. Si definimos

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

entonces G es analítica en $\mathbb{C} - \gamma([a,b])$. De hecho, G es infinitamente diferenciable, con $k-$ésima derivada dada por:

$$G^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Preliminares

Formula integral de Cauchy para derivadas

Supongamos que f es analítica en una región A. Entonces todas las derivadas de f existen en A. Además, para $z_0 \in A$ y γ cualquier curva cerrada homotópica a un punto en A con $z_0 \notin \gamma$ se tiene que:

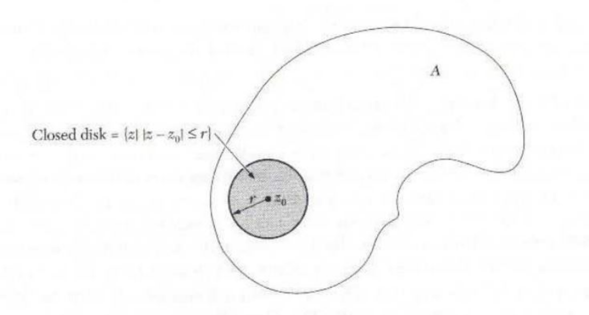
$$f^{(k)}(z_0)I(\gamma; z_0) = \frac{k!}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

donde $f^{(k)}$ denota la $k-$ésima derivada de f.

Preliminares

Teorema de convergencia analítica

Tomemos un abierto A y una secuecia $\{f_n\}_{\in\mathbb{N}}$ de funciones analíticas definidas en A. Si $f_n \to f$ uniformemente en cada disco cerrado contenido en A entonces f es analítica. Además $f_n' \to f'$ puntualmente en A y uniformemente en cada disco cerrado en A



Preliminares

Algunos corolarios

(i) Si $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una secuencia de funiones analíticas definidas sobre un conjunto abierto A de $\mathbb{C}$ y $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$ converge uniformemente en cada disco cerrado en A, entonces g es analítica en A y $g'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g'(z)$ puntualmente en A y también converge uniformemente en cada disco cerrado contenido en A.

(ii) Dada $\gamma : [a, b] \to A$ una curva sobre una región A y f_n una secuencia de funciones continuas definidas en $\gamma([a, b])$ que convergen uniformemente a f en $\gamma([a, b])$ entonces:

$$\int_\gamma f_n \to \int_\gamma f$$

(iii) Si $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$ converge informemente en γ, entonces podemos intercambiar sumas infinitas por integrales:

$$\int_\gamma \sum g_n = \sum \int_\gamma g_n$$

Preliminares

El teorema de Taylor

Supongamos que f es una función analítica definida en un abierto A de $\mathbb{C}$. Tomemos $z_0 \in A$ y definamos el conjunto

$$A_r := \{z : |z - z_0| < r\}, \quad \text{si } r = \infty,\ A_r = A = \mathbb{C}$$

Entonces para cada $z \in A_r$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

converge en A_r y

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

Preliminares

Ceros de funciones analíticas

En el teorema anterior, si $f^{(k)}(z_0) = 0$, entonces $f(z) \equiv 0$ en $D(z_0; r)$. Si así no lo fuese, existiría un número entero no negativo más pequeño n tal que $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. Si $n = 0$ entonces $f(z_0) \neq 0$. Si $n > 0$ entonces $f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \cdots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$, pero $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. En este caso, decimos que f tiene un cero de orden n en z_0.

Decimos también que f tiene un cero de orden n si $f(z)$ puede factorizarse en una vecindad de z_0 como $f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z)$ donde φ es analítica en una vecindad de z_0 y $\varphi(z_0) \neq 0$.

Preliminares

Aislamientos de ceros

De lo anterior, notamos que como $\varphi(z)$ es analítica entonces es continua en $D(z_0; r)$. Como $\varphi(z_0) \neq 0$ existe una $\rho-$vecindad de z_0 en la cual $\varphi(z) \neq 0$, con $\rho < r$. Como $f(z) = (z - z_0)\varphi(z)$ en $D(z_0; \rho)$. Por tanto, f no tiene otros ceros en ese disco más que z_0. En este caso, decimos que los ceros de f son aislados

En resumen, tenemos lo siguiente:

Preliminares

Teorema

Supongamos que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es una función analítica sobre un conjunto abierto Ω en $\mathbb{C}$ y que $z_0 \in \Omega$ y consideremos el disco abierto $D(z_0; r) \subset \Omega$. Supongamos que $f(z_0) = 0$. Entonces exactamente una de estas dos cosas debe ocurrir:

(i) $f(z) = 0$ para cada $z \in D(z_0; r)$.

(ii) Existe un entero n tal que

$$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0 \text{ y } f^{(n)}(z_0) \neq 0.$$

En este último caso existe una función $\varphi(z)$ analítica en $D(z_0; r)$ con $\varphi(z) \neq 0$ y $f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z)$ para todo z en $D(z_0; r)$ y un radio $\rho > 0$ tal que $f(z) = 0$ únicamente en z_0 en el disco $D(z_0; \rho)$.

Preliminares

Corolario (Aislamiento local de ceros)

Supongamos que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es una función analítica sobre un conjunto abierto Ω en $\mathbb{C}$ y que $z_0 \in \Omega$. Si existe una secuencia $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números distintos en Ω tales que $z_n \to z_0$ cuando $n \to \infty$ y $f(z_n) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $f(z) = 0$ para cada z en el disco abierto más grande centrado en z_0 y contenido en Ω.

Preliminares

Teorema de expansión de Laurent.

Tomemos $0 \leq r_1 < r_2$ y $z_0 \in \mathbb{C}$, y consideremos la región $A = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$. Permitamos también que $r_1 = 0$ o $r_2 = \infty$ (o ambos). Si f es una función analítica en una región A, entonces podemos escribir a f para $z \in A$ como sigue:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(a - z_0)^n},$$

donde ambas series convergen absolutamente en A y uniformemente en los conjuntos de la forma $B_{\rho_1,\rho_2} = \{z : \rho_1 \leq |z - z_0| \leq \rho_2\}$, donde $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$. . Esta serie para f es llamada serie de Laurent o expansión de Laurent alrededor de z_0 en el anillo A.

Preliminares

Teorema de expansión de Laurent (continuación).

Si γ es un disco alrededor de z_0 con radio r, donde $r_1 < r < r_2$, entonces los coeficientes están dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\zeta)(\zeta - z_0)^{(n-1)} d\zeta \quad n = 1, 2, \ldots$$

Preliminares

Singularidades aisladas.

En el teorema anterior, cuando $r_1 = 0$ se tiene que f es analítica en $\{z : 0 < |z - z_0| < r_2\}$, la cual es una r_2-vecindad deleteada de z_0, y decimos que z_0 es una singularidad aislada de f. Por tanto, podemos expandir en series de Laurent a f como sigue:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$= \ldots + \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \ldots + \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots$$

donde hemos tomado $b_n = a_{-n}$

Preliminares

Clasificación de puntos singulares.

1. Si z_0 es una singularidad aislada de f y si todos menos un número finito de los b_n son cero, entonces z_0 es llamado un polo de f. Si k es el mayor entero tal que $b_k \neq 0$, z_0 es llamado un polo de orden k. (Para enfatizar que $k \neq \infty$, algunas veces se dice que z_0 es un polo finito de orden k). Si z_0 es un polo de primer orden ($k = 1$), tambien decimos que es un polo simple.
2. Si un número infinito de los b_k's son distintos de cero, entonces z_0 es llamado una singularidad esencial. (algunas veces este z_0 es llamado polo de orden infinito). "Polo" siempre significará un polo de orden finito.

Preliminares

Clasificación de puntos singulares.

3. Decimos que b_1 es el residuo de f en z_0 y escribimos
$$b_1 = \operatorname{Res}(f; z_0)$$
4. Si todos los b_k's son cero, decimos que z_0 es una singularidad removible.
5. Una función que sea analítica en una región A, excepto para polos en A, es llamada meromorfa en A. La frase "*f es una función meromorfa*" significa que f es meromorfa en $\mathbb{C}$.

Preliminares

Proposición.

Dada una función analítica definida en una región A y que tenga una singularidad aislada z_0, entonces

1. z_0 es una singularidad removible si y sólo si cualquiera de las siguientes condiciones se cumple:
   (a) f es acotada en una vecindad deleteada de z_0.
   (b) $\lim_{z\to z_0} f(z)$ existe.
   (c) $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = 0$.
2. z_0 es un polo simple si y solamente si $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$ existe y es igual a cero. Este límite es igual al residuo de f en z_0.

Preliminares

Proposición (continuación).

3. z_0 es un polo de orden $\leq k$ (o posiblemente una singularidad removible) si y sólo si cualquiera de las siguientes condiciones se tiene:
   (a) Existe una constante $M > 0$ y un entero $K \geq 1$ tal que
   $$|f(z)| \leq \frac{M}{|z - z_0|^k}$$
   en una vecindad deleteada de z_0.
   (b) $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^{k+1} f(z) = 0$.
   (c) $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z)$ existe.

Preliminares

Proposición (continuación).

4. z_0 es un polo de orden $k \geq 1$ si y sólo si existe una función analítica ϕ definida en una vecindad U de z_0 tal que $U - \{z_0\} \subset A$, $\phi(z_0) \neq 0$, y

$$f(z) = \frac{\phi(z_0)}{(z - z_0)^k}$$

para todo $z \in U$, $z \neq z_0$.

Preliminares

Proposición.

Supongamos que f y g son analíticas en una vencidad de z_0 con ceros allí de orden n y k respectivamente. (Tomemos el orden como 0 si la función no es 0 en z_0). Hagamos $h(z) = f(z)/g(z)$. Entonces

1. Si $k > n$, entonces h tiene un polo de orden $k - n$ en z_0.
2. Si $k = n$, entonces h tiene una singularidad removible con límite no cero en z_0.
3. Si $k < n$, entonces h tiene una singularidad removible en z_0, y haciendo $h(z_0) = 0$ se obtiene una función analítica con un cero de dorden $n - k$ en z_0.

Preliminares

Proposición.
Si $g(z)$ y $h(z)$ son analíticas y tienen ceros del mismo orden, entonces $f(z) = g(z)/h(z)$ tiene una singularidad removible en z_0.

Proposición.
Supongamos que g y h son analíticas en z_0 y asumamos que $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ y $h'(z_0) \neq 0$. Entonces $f(z) = g(z)/h(z)$ tiene un polo simple en z_0 y

$$\mathrm{Res}(f; z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

Preliminares

Proposición.

Supongamos que $g(z)$ tiene un cero de orden k en z_0 y que $h(z)$ tiene un cero de orden $k+1$. Entonces $g(z)/h(z)$ tiene un polo simple con residuo dado por

$$\operatorname{Res}\left(\frac{g}{h}; z_0\right) = (k+1)\frac{g^{(k)}(z_0)}{h^{(k+1)}(z_0)}$$

Preliminares

Proposición.

Supongamos que g y h son analíticas en z_0, con $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = \ldots = h^{(k-1)}(z_0) = 0$ y $h^{(k)}(z_0) \neq 0$. Entonces g/h tiene un polo de orden k y $\operatorname{Res}(g/h; z_0) = (k!/h^{(k)}(z_0))^k * \Delta$, siendo Δ el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{h^{(k)(z_0)}}{k!} & 0 & 0 & \cdots & 0 & g(z_0) \\ \frac{h^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} & \frac{h^{(k)}(z_0)}{k!} & 0 & \cdots & 0 & g^{(1)}(z_0) \\ \frac{h^{(k+2)}(z_0)}{(k+2)!} & \frac{h^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} & \frac{h^{(k)}(z_0)}{k!} & \cdots & 0 & g^{(2)}(z_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \frac{h^{(2k-1)}(z_0)}{(2k-1)!} & \frac{h^{(2k-2)}(z_0)}{(2k-2)!} & \frac{h^{(2k-3)}(z_0)}{(2k-3)!} & \cdots & \frac{h^{(k+1)(z_0)}}{(k+1)!} & \frac{g^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!} \end{vmatrix}$$

Preliminares

Resumen de criterios. Supongamos que g y h son analíticas en z_0 y que f tiene una singularidad aislada.

	Function	Test	Type of Singularity	Residue at z_0
1.	$f(z)$	$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=0$	removable	0
*2.	$\frac{g(z)}{h(z)}$	g and h have zeros of same order	removable	0
*3.	$f(z)$	$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=0$ exists and is $\neq 0$	simple pole	$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$
*4.	$\frac{g(z)}{h(z)}$	$g(z_0)\neq 0, h(z_0)=0$, $h'(z_0)\neq 0$	simple pole	$\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$
5.	$\frac{g(z)}{h(z)}$	g has zero of order k, h has zero of order $k+1$	simple pole	$(k+1)\frac{g^{(k)}(z_0)}{h^{(k+1)}(z_0)}$
*6.	$\frac{g(z)}{h(z)}$	$g(z_0)\neq 0$ $h(z_0)=0=h'(z_0)$ $h''(z_0)\neq 0$	second-order pole	$2\frac{g'(z_0)}{h''(z_0)}-\frac{2}{3}\frac{g(z_0)h'''(z_0)}{[h''(z_0)]^2}$
*7.	$\frac{g(z)}{(z-z_0)^2}$	$g(z_0)\neq 0$	second-order pole	$g'(z_0)$
*8.	$\frac{g(z)}{h(z)}$	$g(z_0)=0, g'(z_0)\neq 0$, $h(z_0)=0=h'(z_0)$ $=h''(z_0), h'''(z_0)\neq 0$	second-order pole	$3\frac{g''(z_0)}{h'''(z_0)}-\frac{3}{2}\frac{g'(z_0)h^{(iv)}(z_0)}{[h'''(z_0)]^2}$
9.	$f(z)$	k is the smallest integer such that $\lim_{z\to z_0}\phi(z_0)$ exists where $\phi(z)=(z-z_0)^k f(z)$	pole of order k	$\lim_{z\to z_0}\frac{\phi^{(k-1)}(z)}{(k-1)!}$
*10.	$\frac{g(z)}{h(z)}$	g has zero of order l, h has zero of order $k+l$	pole of order k	$\lim_{z\to z_0}\frac{\phi^{(k-1)}(z)}{(k-1)!}$ where $\phi(z)=(z-z_0)^k\frac{g}{h}$
11.	$\frac{g(z)}{h(z)}$	$g(z_0)\neq 0, h(z_0)=\ldots=h^{k-1}(z_0)$ $=0, h^k(z_0)\neq 0$	pole of order k	see Proposition 4.1.7.

Preliminares

Teorema del Residuo.

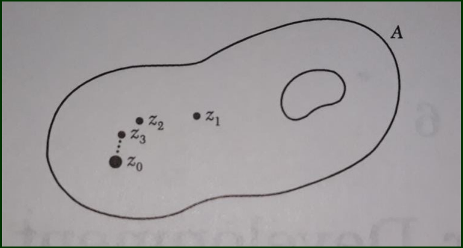
Dada una región A con $z_1, z_2, \ldots, z_n \in A$ n puntos distintos en A y f una función analítica en $A - \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$, esto es, f una función analítica sobre A, excepto para singularidades aisladas $z_1, \ldots, z_n$. Si γ es una curva cerrada en A homotópica a un punto en A tal que $z_i \notin \gamma$, entonces

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} [\mathrm{Res}(f; z_i)] I(\gamma; z_i)$$

Continuación Analítica

Teorema (Principio de la continuación analítica - teorema de identidad)

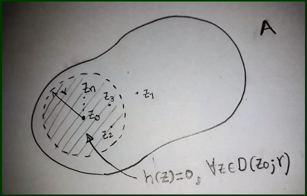
Supongamos que f y g son funciones analíticas definidas en una región A. Si existe una secuencia $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos distintos de A que convergen a un punto $z_0 \in A$ y tal que $f(z_n) = g(z_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $f = g$ en todo A. La conclusión es válida, en particular, si $f = g$ sobre alguna vecindad de algún punto de A.



Teorema (Principio de la continuación analítica - teorema de identidad)

Prueba:

Hagamos $h(z) = f(z) - g(z)$. Como f y g son analíticas en A entonces h es analítica en A. Por hipótesis existe una secuencia $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números distintos que converge a $z_0 \in A$. Notemos que $h(z_n) = f(z_n) - g(z_n) = f(z_n) - f(z_n) = 0$. Se cumplen entonces las hipótesis del corolario de aislamientos de ceros y por tanto $h(z) = 0$ en $D(z_0; r)$, con r el real más grande tal que $D(z_0; r) \subset A$.



Teorema (Principio de la continuación analítica - teorema de identidad)

Prueba (continuación):

Veamos que en efecto, $h(z) = 0$ en todo A. Para esto, definamos el siguiente conjunto

$$\Omega = \{z \in A : h \text{ es } 0 \text{ en una vecindad de } z\}$$

Se probará que B es un subconjunto abierto y cerrado relativo a A. La conexidad de A implicará que $A = \Omega$ y por tanto el resultado requerido: $f(z) = g(z)$ en todo A.

Ω es no vacio pues $h(z) = 0$ en $D(z_0, r) \subset A$, en particular, $h(z_0) = 0$ y así, $z_0 \in \Omega$.

Teorema (Principio de la continuación analítica - teorema de identidad)

Prueba (continuación):

Ω es abierto: Tomemos $w \in \Omega$ entonces existe una vecindad de w en la cual $h(z) = 0$, es decir, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $z \in D(w; \varepsilon)$, $h(z) = 0$ y por tanto $D(w; \epsilon) \subset \Omega$. Esto prueba que Ω es un subconjunto abierto de A.

Ω es cerrado: Para ver esto, tomemos una sucesión $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos en Ω que converga a cierto $z \in A$; esto es, $w_n \to z$ cuando $n \to \infty$. Veamos que $z \in \Omega$.
Puesto que A es una región, A es en particular abierto y por tanto $z \in A = \operatorname{int}(A)$. Aplicando nuevamente el corolario de aislación de ceros, como $w_n \to z$ y $h(w_n) = 0$ entonces $h(z) = 0$ en cierta vecindad de z. De esta manera, $z \in \Omega$ y así, Ω es cerrado.

Teorema (Principio de la continuación analítica - teorema de identidad)

Prueba (continuación):

Ω es abierto y cerrado: En lo anterior se ha probado que Ω es clopen en A. Como A es conexo, los únicos abiertos y cerrados en A son A y el $\emptyset$. Pero se ha probado que $\Omega \neq \emptyset$. Concluimos que

$$A = \Omega = \{z \in A : h \text{ es } 0 \text{ en una vecindad de } z\}$$

De esta manera, $z \in A$ si y solamente si z admite una vecidad en la cual $h(z) = 0$, esto es $f(z) - g(z) = 0$ lo cual equivale a que

$$f(z) = g(z) \quad \text{para todo } z \in A$$

Teorema (Principio de la continuación analítica - teorema de identidad)

Corolario 1.

Los ceros (o más específicamente, cuando se asume un valor específico w_0) de una función analítica f no constante son aislados en el siguiente sentido:

Si f es analítica y no constante en una región A y $f(z_0) = w_0$ para un punto $z_0 \in A$, entonces existe un número $\varepsilon > 0$ tal que $f(z)$ no es igual a w_0 para cualquier z en la vecindad deleteada $\{z : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$.

Prueba: Suponiendo que dicho épsilon no existe, f podría coincidir con la función constante definida por $h(z) = w_0$ por lo menos en una secuencia de puntos que converja a z_0. Por el teorema de identidad f coincidiría con h en todo A y por tanto sería constate. Una contradicción.

Teorema (Principio de la continuación analítica - teorema de identidad)

Corolario 2.

Supongamos que $f : A \to \mathbb{C}$ y $g : B \to \mathbb{C}$ son analíticas en las regiones A y B. Supongamos que $A \cap B \neq \emptyset$ y que $f = g$ en $A \cap B$. Si definimos

$$h(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in A \\ g(z) & \text{si } z \in B \end{cases}$$

entonces h es analítica en $A \cup B$ y es la única función analítica en $A \cup B$ que iguala a f (o a g). En este caso, decimos que h es una continuación analítica de f (o g).

Fórmula de conteo de raíces y polos

Teorema del conteo de raíces y polos.

Supongamos que f es una función analítica definida en una región A excepto para polos en $b_1, \ldots, b_m$ y ceros en $a_1, \ldots, a_n$, contados con sus multiplicidades (es decir, si b_l es un polo de orden k, entonces b_l se repite k veces en la lista dada, y similarmente para los ceros a_j). Supongamos que γ es una curva cerrada homotópica a un punto en A que no pasa a través de los puntos a_j o b_l. Entonces

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \left[\sum_{j=1}^{n} I(\gamma; a_j) - \sum_{l=1}^{m} I(\gamma; b_l) \right]$$

Teorema (Principio de la continuación analítica - teorema de identidad)

Corolario 2.

Supongamos que $f : A \to \mathbb{C}$ y $g : B \to \mathbb{C}$ son analíticas en las regiones A y B. Supongamos que $A \cap B \neq \emptyset$ y que $f = g$ en $A \cap B$. Si definimos

$$h(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in A \\ g(z) & \text{si } z \in B \end{cases}$$

entonces h es analítica en $A \cup B$ y es la única función analítica en $A \cup B$ que iguala a f (o a g). En este caso, decimos que h es una continuación analítica de f (o g).

Fórmula de conteo de raíces y polos

Teorema del conteo de polos y raíces:

Supongamos que f es una función analítica definida en una región A excepto para polos en $b_1, \ldots, b_m$ y ceros en $a_1, \ldots, a_n$, contados con sus multiplicidades (es decir, si b_l es un polo de orden k, entonces b_l se repite k veces en la lista dada, y similarmente para los ceros a_j). Supongamos que γ es una curva cerrada homotópica a un punto en A que no pasa a través de los puntos a_j o b_l. Entonces

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \left[\sum_{j=1}^{n} I(\gamma; a_j) - \sum_{l=1}^{m} I(\gamma; b_l) \right]$$

Fórmula de conteo de raíces y polos

Prueba:

Definamos $g(z) = f'(z)/f(z)$. Entonces g es analítica en todo A, exceptuando los polos y los ceros de f. Supongamos que f tiene un cero de orden k en a_j y f' uno de orden $k-1$, esto es

$$f(a_j) = f'(a_j) = f''(a_j) = \cdots = f^{(k-1)}(a_j) = 0, \quad f^{(k)}(a_j) \neq 0$$

$$f'(a_j) = [f']'(a_j) = \cdots = [f']^{(k-2)}(a_j) = 0, \quad [f']^{(k-1)}(a_j) \neq 0$$

entonces g tiene un polo de orden $k-(k-1) = 1$ en a_j (i.e, un polo simple). En este último caso existe una función $\varphi(z)$ en una vecindad deleteada U de a_j tal que $\varphi(a_j) \neq 0$ y $f(z) = (z-z_0)^k\varphi(z)$ para todo z en U.

Fórmula de conteo de raíces y polos

Prueba (continuación):

De esta manera, utilizando la regla de la cadena

$$
\begin{aligned}
g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{[(z-a_j)^k \varphi(z)]'}{(z-a_j)^k \varphi(z)} \\
&= \frac{k(z-a_j)^{k-1}\varphi(z)}{(z-a_j)^k \varphi(z)} + \frac{(z-a_j)^k \varphi'(z)}{(z-a_j)^k \varphi(z)} \\
&= k(z-a_j)^{-1} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \\
&= \frac{k}{(z-a_j)} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}
\end{aligned}
$$

Esto verifica que de hecho, a_j es un polo simple y que

$$\mathrm{Res}(g, a_j) = k$$

Fórmula de conteo de raíces y polos

Prueba (continuación):

Ahora, supongamos que b_l son polos de orden k. Por definición, en el teorema de expansión de Laurent, $d_n = 0$ para todo $n > k$ y por tanto

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{d_k}{(z-b_l)^k} + \ldots + \frac{d_1}{z-b_l} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-b_l)^n \\ &= \frac{1}{(z-b_l)^k}\left[\sum_{r=0}^{k-1} d_{k-r}(z-b_l)^r + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-b_l)^{n+k}\right] \\ &= \frac{\psi(z)}{(z-b_l)^k} \end{aligned}$$

$$\text{con } \psi(z) = \sum_{r=0}^{k-1} d_{k-r}(z-b_l)^r + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-b_l)^{n+k}$$

Fórmula de conteo de raíces y polos

Prueba (continuación):

De esta manera, cerca de los b_l tenemos:

$$\begin{aligned}
g(z) &= \frac{(z-b_l)^k}{\psi(z)}\left[\frac{\psi(z)}{(z-b_l)^k}\right]' \\
&= \frac{(z-b_l)^k}{\psi(z)}\left[\frac{\psi'(z)(z-b_l)^k - k\psi(z)(z-b_l)^{k-1}}{(z-b_l)^{2k}}\right] \\
&= \frac{(z-b_l)^{2k}\psi'(z)}{(z-b_l)^{2k}}\psi(z) - \frac{k(z-b_l)^{2k-1}\psi(z)}{(z-b_k)^{2k}\psi(z)} \\
&= -\frac{k}{(z-b_l)} + \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}
\end{aligned}$$

Por tanto, $\mathrm{Res}(g, b_l) = -k$

Fórmula de conteo de raíces y polos

Prueba (continuación):

Por hipótesis, γ es una curva cerrada homotópica a un punto en A y que no pasa por los puntos de singularidad. Por tanto, aplicando el teorema del residuo se tiene que

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i \left\{ \sum_j \mathrm{Res}(g, a_j) I(\gamma; a_j) + \sum_l \mathrm{Res}(g, b_l) I(\gamma; b_l) \right\}$$

de lo cual

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i \left[\sum_{j=1}^{n} I(\gamma; a_j) - \sum_{l=1}^{m} I(\gamma; b_l) \right] \qquad \blacksquare$$

Cálculo de la variación del argumento sobre una curva cerrada

Para una curva cerrada γ y un punto z_0 que no esté en γ, el cambio en el argumento de $z - z_0$ cuando z se mueve en γ es $2\pi I(\gamma; z_0)$ y se escribe $\Delta_\gamma = 2\pi I(\gamma; z_0)$

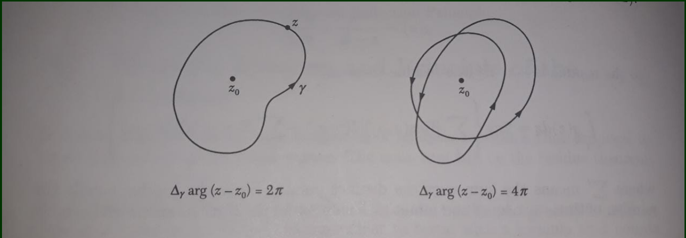


Figure 6.2.1: Change in the argument of $z - z_0$ when the two curves are traversed.

Cálculo de la variación del argumento sobre una curva cerrada

Queremos ahora calcular $\arg f(\gamma(t))$ a medida que t varía de a a b, si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ entonces nos fijaremos en la diferencia

$$\arg f(\gamma(b)) - \arg f(\gamma(a))$$

Equivalentemente, haciendo $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$, computamos $\Delta_{\tilde{\gamma}} \arg z$.

Definición: Dada una función analítica en una región A y γ una curva cerrada en A homotópica a un punto y que no pase a través de ningún cero de f, se define

$$\Delta_\gamma \arg f := 2\pi \cdot I(f \circ \gamma; 0)$$

Principio del argumento

Teorema (Principio del argumento).

Tomemos una función analítica f definida en una región A excepto para polos en $b_1, \ldots, b_m$ y ceros en $a_1, \ldots, a_n$ contados de acuerdo a su multiciplidad. Supongamos también que γ es una curva cerrada homotópica a un punto y que no pasa a través de los a_j o b_l. Entonces

$$\Delta_\gamma \arg f = 2\pi \left[\sum_{j=1}^{n} I(\gamma; a_j) - \sum_{l=1}^{m} I(\gamma; b_l) \right]$$

Principio del argumento

Prueba:

Por el teorema de conteo de polos y raíces, sabemos que

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i\left[\sum_{j=1}^{n} I(\gamma; a_j) - \sum_{l=1}^{m} I(\gamma; b_l)\right]$$

Luego es suficiente probar que

$$i\Delta_\gamma \arg f = \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

pues f no tiene ceros o polos sobre γ.

Principio del argumento

Prueba:

Por otro lado, recordemos que para una curva cerrada $\tilde{\gamma}$ en $\mathbb{C}$ y un punto $z_0 \in C$ definimos el índice de γ en z_0 como

$$I(\tilde{\gamma}; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{dz}{z - z_0} \quad \Longleftrightarrow \quad 2\pi I(\tilde{\gamma}; z_0) = \int_{\tilde{\gamma}} \frac{dz}{z - z_0}$$

Aplicando esto con $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$ y $z_0 = 0$, tenemos:

$$i\Delta_\gamma \arg f = 2\pi i \cdot I(f \circ \gamma; 0) = \int_{f \circ \gamma} \frac{dz}{z}$$

Basta entonces aplicar la definición de integral de contorno dada la curva parametrizada cerrada $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$

Principio del argumento

Prueba (continuación):

$$
\begin{aligned}
i\Delta_\gamma \arg f &= \int_{\gamma\circ f} \frac{dz}{z} \\
&= \int_a^b \frac{\frac{d}{dt} f(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} \gamma'(t)dt \\
&= \int_a^b \frac{f'(\gamma(t)}{f(\gamma(t))} \gamma'(t)dt \\
&= \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz
\end{aligned}
$$

Lo cual prueba el resultado:

$$
\Delta_\gamma \arg f = 2\pi \left[\sum_{j=1}^{n} I(\gamma; a_j) - \sum_{l=1}^{m} I(\gamma; b_l) \right]
$$