Examen Parcial 3 de Álgebra
(Solución)

Ejercicio 1. Expresa la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ como producto de matrices elementales.

Solución. Vamos a calcular la matriz inversa de A con el método de Gauss-Jordan. En cada paso definiremos la matriz elemental de acuerdo a la operación realizada en la reducción.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 + \frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{4}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/4 & -1/4 \end{array}\right) \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/4 \end{pmatrix}$$

De donde

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Ejercicio 2. Una matriz cuadrada A es *ortogonal* si $A^\top = A^{-1}$. Prueba que si A es una matriz ortogonal, entonces $|A| = 1$ ó $|A| = -1$.

Solución. Tenemos,

$$\begin{aligned}
|A|^2 &= |A||A| && \text{definición del cuadrado de un número} \\
&= |A||A^T| && \text{propiedad del determinante: } |A| = |A^T| \\
&= |A||A^{-1}| && \text{por hipótesis: } A^{-1} = A^T \\
&= |AA^{-1}| && \text{el determinante de un producto es el producto de los determinantes} \\
&= |I| && \text{definición de matriz inversa} \\
&= 1 && \text{el determinante de la identidad es } 1.
\end{aligned}$$

De donde $|A| = \pm\sqrt{1}$. Esto es, $|A| = 1$ ó $|A| = -1$. □

Ejercicio 3. Para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ la matriz siguiente es invertible.

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha - 1 & \alpha + 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 - \alpha & \alpha + 3 & \alpha + 7 \end{pmatrix}$$

Solución. Observamos que el tercer renglón es la suma del primero y dos veces el segundo. Por lo tanto $|A| = 0$. Luego la matriz A no es invertible (no importa el valor de α). □