ستة تعاريف للدالة الأسية للأساس e

نورالدين رفيق

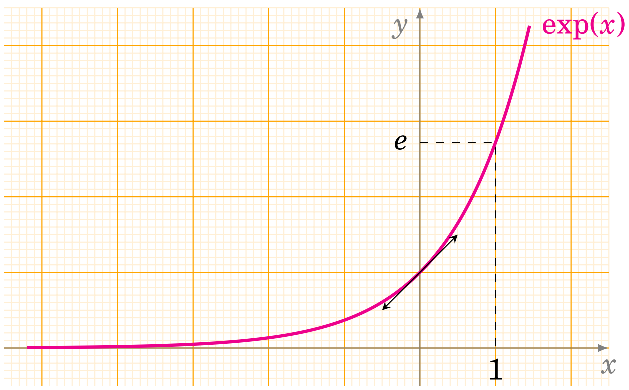
4 أبريل 2015

يمكن تعريف الدالة الأسية للأساس $e \approx 2,71828$ بعدة طرق متكافئة. أبسط طريقة لتعريفها هي القول أنها الدالة العكسية لدالة اللوغاريتم النبيري، حيث إن هذه الأخيرة تشكل تقابلا من $]0,+\infty[$ الى $\mathbb{R}$ بوصفها متصلة ومتزايدة قطعا على مجال تعريفها. نرمز للدالة الأسية بـ $\exp(x)$ أو e^x.

الدالة الأسية هي الدالة الوحيدة القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ التي تحل مسألة كوشي، أي أنها تحقق الشرطين :

$$f(0) = 1 \text{ و } f' = f$$

وجود هذه الدالة و وحدانيتها مكفول بالمبرهنة التي تعرف عند الفرنسيين بمبرهنة Cauchy-Lipschitz و عند الإنجليز بمبرهنة Picard-Lindelöf.



شكل 1: التمثيل المبياني على ورق ميليمتري

الدالة الأسية هي الدالة الوحيدة المتصلة على $\mathbb{R}$ التي تحول المجموع إلى جداء، أي أنها تحقق المعادلة الدالية :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

و التي تأخذ القيمة e في 1.
فهي إذا تشاكل (=تطبيق يحافظ على الشكل Morphisme) من الزمرة $(\mathscr{R},+)$ نحو الزمرة $(\mathscr{R},\cdot)$. بهذا ا لتعريف نحدد $\exp(x)$ على الأعداد الصحيحة الطبيعية ثم على الجذرية، ثم نستثمر اتصالها لتحديدها على الأعداد الغير جذرية. و نبرهن من خلال هذا التعريف أنها موجبة قطعا و أنها ليست متصلة فحسب، بل قابلة للإشتقاق ومشتقتها ليست إلا إياها.

يمكن تعريف الدالة الأسية بمتسلسلة القوى (بالفرنسية Série entière و بالإنجليزية Power series) ذات قطر تقارب لا منتهي :

$$\exp(x) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots$$

أقل شيوعا، يمكن تعريفها كحل للمعادلة التالية :

$$x = \int_1^{f(x)} \frac{dt}{t}$$

أو باستعمال نهاية متتالية الدوال :

$$\exp(x) \overset{\text{déf}}{=} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

و هي موجبة قطعا و متصلة لأنها لامتناهية الاkjgشتقاق، أي أنها تنتمي الى الفئة $\mathscr{C}^\infty$، و لها استخدامات واسعة في الفيزياء والكيمياء والهندسة الكهربائية والهندسة الميكانيكية والإحصاء وغيرها من العلوم.

La bijection réciproque de $\mathbf{ln} :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ s'appelle la fonction **exponentielle**, notée $\mathbf{exp} : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$.