

上海某高中 2017-2018 学年度第一学期

高一数学期中试卷

微信关注公众号:橘子数学

满分 150 分, 120 分钟完成, 允许使用计算器, 答案一律写在答题纸上

2017.11

一、填空 第 1-6 题每题 4 分, 第 7-12 题每题 5 分.

1. 已知集合 $U = \{1, 2, 3, 4\}$, 集合 $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}$, 则 $(A \cap \complement_U B) \cup (\complement_U A \cap B) = \underline{\{1, 3\}}$.

解法一

$$A \cap \complement_U B = \{1\}, B \cap \complement_U A = \{3\}.$$

$$(A \cap \complement_U B) \cup (\complement_U A \cap B) = \{1, 3\}.$$

2. 设集合 $M = \{x | 0 < x \leq 3\}, N = \{x | 0 < x \leq 2\}$, 那么“ $a \in M$ ”是“ $a \in N$ ”的 必要非充分 条件.

解法一

由 $N \subset M$, 可知“ $a \in M$ ”是“ $a \in N$ ”的必要非充分条件.

3. 函数 $f(x) = \sqrt{x+1} + \frac{1}{2-x}$ 的定义域为 $[-1, 2) \cup (2, +\infty)$.

解法一

$$\text{根据题意: } \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2-x \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{解得: } x \geq -1 \text{ 且 } x \neq 2$$

定义域是: $[-1, 2) \cup (2, +\infty)$.

4. 已知集合 $A = \{x | |x-a| < 1, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x | \frac{2x-a}{x+1} < 1, x \in \mathbf{R}\}$, 且 $A \cap B = \emptyset$, 则实数 a 的取值范围是 $a \in (-\infty, -2]$.

解法一

$$A = (a - 1, a + 1),$$

$$\text{由 } \frac{2x - a}{x + 1} < 1 \text{ 化简得 } \frac{x - a - 1}{x + 1} < 0.$$

若 $a + 1 > -1$, 不满足 $A \cap B = \emptyset$.

若 $a + 1 \leq -1$, 满足 $A \cap B = \emptyset$.

故 $a \in (-\infty, -2]$.

5. 已知 $y = f(x), y = g(x)$ 是两个定义在 $\mathbf{R}$ 上的二次函数, 其 x, y 的取值如下表所示:

x	1	2	3	4
$f(x)$	-3	-4	-3	0
$g(x)$	0	1	0	-3

则不等式 $f(g(x)) \geq 0$ 的解集为 $(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$.

解法一

由表格可得 $y = f(x)$ 图像开口向上且关于 $x = 2$ 对称, 其零点为 $x = 4$ 和 $x = 0$.

故不等式 $f(g(x)) \geq 0$, 即 $g(x) \in (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$.

又 $y = g(x)$ 的图像开口向下且关于 $x = 2$ 对称, 其最大值为 1.

故 $g(x) \in (-\infty, 0]$, 解得 $x \in (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$.

6. 关于 x 的不等式 $2kx^2 + kx + \frac{3}{8} < 0$ 的解集不为空集, 则 k 的取值范围为 $k \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$.

解法一

若 $k < 0$, 二次函数 $y = 2kx^2 + kx + \frac{3}{8}$ 图像开口向下, 解集恒不为空集. 满足.

若 $k = 0$, 不等式解集为 $\emptyset$, 不满足.

若 $k > 0$, 二次函数 $y = 2kx^2 + kx + \frac{3}{8}$ 图像开口向上, 要求 $\Delta = k^2 - 4 \cdot (2k) \cdot \frac{3}{8} = k^2 - 3k > 0$, 解得 $k \in (3, +\infty)$.

综上所述, $k \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

7. 已知本张试卷的出卷人在公元 x^2 年时年龄为 $x - 8$ 岁, 则出卷人的出生年份是 1989 . (假设出生当年的年龄为 1 岁)

解法一

设出卷人的出生年份是 y .

则有 $x^2 - y + 1 = x - 8$.

化简得 $y = x^2 - x + 9$.

由生活常识,

$1952 < x^2 - x + 9 < 2000, x \in \mathbf{N}$.

解得 $x = 45$, 故 $y = 1989$.

8. 若对任意 $x \in \mathbf{R}$, 不等式 $|x| \geq ax$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 $a \in [-1, 1]$

解法一

若 $x > 0$, 得 $x \geq ax$, 解得 $a \leq 1$.

若 $x = 0$, 得 $0 \geq 0$ 成立.

若 $x < 0$, 得 $-x \geq ax$, 解得 $a \geq -1$.

综上所述, $a \in [-1, 1]$.

解法二

画出 $y = |x|$ 与 $y = ax$ 的图像,

要使 $y = ax$ 的图像恒在 $y = |x|$ 下方,

则 $a \in [-1, 1]$.

9. 设常数 $a > 0$, 若 $9x + \frac{a^2}{x} \geq a + 1$ 对一切正实数 x 成立, 则 a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{5}, +\infty\right)$.

解法一

$$\forall x \in \mathbf{R}^+, 9x + \frac{a^2}{x} \geq 2\sqrt{9x \cdot \frac{a^2}{x}} = 6a,$$

$$\therefore 6a \geq a + 1,$$

$$\therefore a \geq \frac{1}{5}.$$

10. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2, & x \leq 0 \\ -x^2, & x > 0 \end{cases}$, 若 $f(f(a)) = 2$, 则 $a = \underline{\quad}$.

解法一

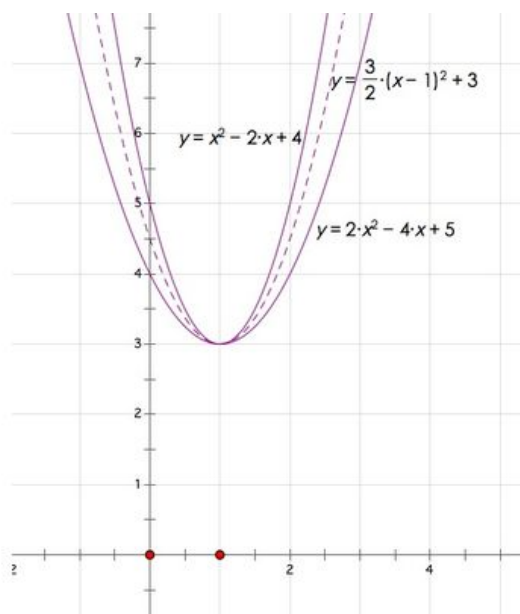
若 $a \leq 0$, 则 $f(a) = a^2 + 2a + 2 = (a+1)^2 + 1 > 0$, 而 $f(f(a)) = -(a^2 + 2a + 2)^2 = 2$ 无解, 舍去;

若 $a > 0$, 则 $f(a) = -a^2 < 0$, 故 $f(f(a)) = (-a^2)^2 + 2(-a^2) + 2 = 2$, 解得 $a = \sqrt{2}$.
综上所述, $a = \sqrt{2}$.

11. 若二次函数 $y = f(x)$ 对一切 $x \in \mathbb{R}$ 恒有 $x^2 - 2x + 4 \leq f(x) \leq 2x^2 - 4x + 5$ 成立, 且 $f(5) = 27$, 则 $f(11) = \underline{153}$.

解法一

画出不等式两边的两个二次函数图像, 如图, 可得未知的二次函数 $y = f(x)$ 开口向上, 以 $(1, 3)$ 为顶点, 故可设函数解析式为 $f(x) = a(x-1)^2 + 3$, 将 $f(5) = 27$ 代入可得 $a = \frac{3}{2}$, 则 $f(x) = \frac{3}{2}(x-1)^2 + 3$, 故 $f(11) = 153$.



第 11 题

12. 已知 $f(x) = (a^2 - 5)x^2 + 2x + 2$. 若不等式 $f(x) > x$ 的解集为 A . 已知 $(0, 1) \subseteq A$, 则 a 的取值范围为 $a \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$.

解法一

由题意得, $(a^2 - 5)x^2 + x + 2 > 0$ 在 $(0, 1)$ 上恒成立.

即 $a^2 - 5 > -\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上恒成立.

设 $f(x) = -\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} = -2(\frac{1}{x} + \frac{1}{4})^2 + \frac{1}{8}$,

又 $\frac{1}{x} \in (1, +\infty)$, 故 $f(x) < -3$.

即 $a^2 - 5 \geq -3$, 解得 $a \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$.

二、选择 第 13-16 题每题 5 分.

13. 设 P, Q 为两个非空实数集, 定义集合 $P + Q = \{a + b | a \in P, b \in Q\}$. 若 $P = \{0, 2, 5\}, Q = \{1, 2, 6\}$, 则 $P + Q$ 中元素的个数是 B. ()

A. 9 B. 8 C. 7 D. 6

解法一

$\because P = \{0, 2, 5\}, Q = \{1, 2, 6\}$,

$\therefore P + Q = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 11\}$.

故选 B

14. 不等式 $(1 + x)(1 - |x|) > 0$ 的解集是 D. ()

A. $\{x | 0 \leq x < 1\}$ B. $\{x | x < 0 \text{ 且 } x \neq -1\}$
C. $\{x | -1 < x < 1\}$ D. $\{x | x < 1 \text{ 且 } x \neq -1\}$

解法一

求不等式 $(1 + x)(1 - |x|) > 0$ 的解集, 则分两种情况讨论:

情况 1: $\begin{cases} 1 + x > 0 \\ 1 - |x| > 0 \end{cases}$

即 $\begin{cases} x > -1 \\ -1 < x < 1 \end{cases}$ 则 $-1 < x < 1$.

情况 2: $\begin{cases} 1 + x < 0 \\ 1 - |x| < 0 \end{cases}$

即 $\begin{cases} x < -1 \\ x > 1 \text{ 或 } x < -1 \end{cases}$ 则 $x < -1$.

两种情况取并集得 $\{x|x < 1 \text{ 且 } x \neq -1\}$.

故选 D.

15. 已知三个不等式: $ab > 0, bc - ad > 0, \frac{c}{a} - \frac{d}{b} > 0$ (其中 a, b, c, d 均为实数), 用其中两个不等式作为条件, 余下的一个不等式作为结论组成一个命题, 可组成的正确命题的个数是 D ()

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

解法一

$$\begin{cases} ab > 0, & \dots (1) \\ bc - ad > 0, & \dots (2) \end{cases}$$

$$(2) \div (1) \text{ 得 } \frac{bc - ad}{ab} = \frac{c}{a} - \frac{d}{b} > 0.$$

$$\begin{cases} ab > 0, & \dots (1) \\ \frac{c}{a} - \frac{d}{b} > 0, & \dots (3) \end{cases}$$

$$(1) \times (3) \text{ 得 } ab(\frac{c}{a} - \frac{d}{b}) = bc - ad > 0.$$

$$\begin{cases} bc - ad > 0, & \dots (2) \\ \frac{c}{a} - \frac{d}{b} > 0, & \dots (3) \end{cases}$$

用反证法, 显然 $ab \neq 0$,

设 $ab < 0$, (2) 式同除 ab 得 $\frac{c}{a} - \frac{d}{b} < 0$, 矛盾,

故 $ab > 0$. 故选 D.

16. 设 $a > 0, b > 0$, 则以下不等式中不恒成立的是 B ()

A. $(a + b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \geq 4$

B. $a^3 + b^3 \geq 2ab^2$

C. $a^2 + b^2 + 2 \geq 2a + 2b$

D. $\sqrt{|a - b|} \geq \sqrt{a} - \sqrt{b}$

解法一

$$a > 0, b > 0,$$

$$(a + b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{\frac{1}{ab}} \geq 4,$$

故 A 恒成立;

$$a^3 + b^3 \geq 2ab^2,$$

取 $a = \frac{1}{2}, b = \frac{2}{3}$, 则 B 不成立;

$$a^2 + b^2 + 2 - (2a + 2b) = (a - 1)^2 + (b - 1)^2 \geq 0,$$

故 C 恒成立;

若 $a < b$, 则 $\sqrt{|a-b|} \geq \sqrt{a} - \sqrt{b}$ 恒成立,

若 $a \geq b$, 则 $(\sqrt{|a-b|})^2 - (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 2\sqrt{ab} \geq 0$,

故 $\sqrt{|a-b|} \geq \sqrt{a} - \sqrt{b}$, 即 D 恒成立.

三、简答 第 17-19 题每题 14 分, 第 20 题 16 分, 第 21 题 18 分.

17. (14 分) 已知 $\triangle ABC$ 为直角三角形, 记其两条直角边长分别为 $a, b \in \mathbf{R}^+$, 记面积为 S , 周长为 C . 若三角形面积为定值, 其周长是否有最值, 最大值还是最小值, 何时取到, 为多少(结果用 S 表示)?

解法一

$$C = a + b + \sqrt{a^2 + b^2},$$

.....本步骤 2 分, 累计 2 分

$$\text{由 } \sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{2ab}, a + b \geq 2\sqrt{ab},$$

$$\text{得 } C \geq 2\sqrt{ab} + \sqrt{2ab}$$

.....本步骤 6 分, 累计 8 分

$$\text{由 } S = \frac{1}{2}ab,$$

$$\text{得 } C \geq (2 + 2\sqrt{2})\sqrt{S},$$

.....本步骤 4 分, 累计 12 分

当且仅当 $a = b = \sqrt{2S}$ 时取到最小值.

.....本步骤 2 分, 累计 14 分

18. (14 分) 已知 $a \in \mathbf{R}$, 若关于 x 的方程 $x^2 + x + |a - \frac{1}{4}| + |a| = 0$ 有实根, 求 a 的取值范围.

解法一

$$\text{方程即 } |a - \frac{1}{4}| + |a| = -x^2 - x \in [0, \frac{1}{4}],$$

$$\text{即解不等式 } |a - \frac{1}{4}| + |a| \leq \frac{1}{4}.$$

$$\text{当 } a \leq 0, \text{ 化简得 } \frac{1}{4} - 2a \leq \frac{1}{4}, \text{ 解得 } a = 0;$$

$$\text{当 } 0 < a \leq \frac{1}{4}, \text{ 化简得 } \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}, \text{ 解得 } a \in (0, \frac{1}{4}];$$

$$\text{当 } a > \frac{1}{4}, \text{ 化简得 } 2a - \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}, \text{ 无解.}$$

$$\text{综上所述, } a \in [0, \frac{1}{4}]$$

.....本步骤 14 分, 累计 14 分

19. (14 分) 先阅读下列不等式的证法, 再解决后面的问题:

$$\text{证明: } (a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$$

证: 令 $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, $B = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$

$$\begin{aligned} \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} &= \frac{a_1b_1}{AB} + \frac{a_2b_2}{AB} \\ &= \frac{a_1}{A} \cdot \frac{b_1}{B} + \frac{a_2}{A} \cdot \frac{b_2}{B} \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{a_1^2}{A^2} + \frac{b_1^2}{B^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a_2^2}{A^2} + \frac{b_2^2}{B^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{a_1^2 + a_2^2}{A^2} + \frac{b_1^2 + b_2^2}{B^2}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

故 $(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$.

(1) (0 分) 若 $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbf{R}^+$, 利用上述结论, 证明:

$$(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) \geq (\sqrt{x_1y_1} + \sqrt{x_2y_2})^2$$

(2) (0 分) 若 $x_1, y_1, x_2, y_2, z_1, z_2 \in \mathbf{R}^+$, 模仿上述证法并结合 (1) 的证法, 证明:

$$(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)(z_1 + z_2) \geq (\sqrt[3]{x_1y_1z_1} + \sqrt[3]{x_2y_2z_2})^3$$

(提示: 若 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$, 有 $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \geq abc$.)

解法一

(1) 设 $a_1 = \sqrt{x_1}$, $a_2 = \sqrt{x_2}$, $b_1 = \sqrt{y_1}$, $b_2 = \sqrt{y_2}$.

由

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$$

得

$$(\sqrt{x_1}\sqrt{y_1} + \sqrt{x_2}\sqrt{y_2})^2 \leq [((\sqrt{x_1})^2 + (\sqrt{x_2})^2)((\sqrt{y_1})^2 + (\sqrt{y_2})^2)]$$

即

$$(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) \geq (\sqrt{x_1y_1} + \sqrt{x_2y_2})^2$$

.....本步骤 6 分, 累计 6 分

(2) 设 $a_1 = \sqrt[3]{x_1}$, $b_1 = \sqrt[3]{y_1}$, $c_1 = \sqrt[3]{z_1}$, $a_2 = \sqrt[3]{x_2}$, $b_2 = \sqrt[3]{y_2}$, $c_2 = \sqrt[3]{z_2}$.

要证

$$(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)(z_1 + z_2) \geq (\sqrt[3]{x_1 y_1 z_1} + \sqrt[3]{x_2 y_2 z_2})^3$$

即证

$$(a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2)^3 \leq (a_1^3 + a_2^3)(b_1^3 + b_2^3)(c_1^3 + c_2^3)$$

(不换元, 直接证不扣分)

.....本步骤 2 分, 累计 8 分

$$\text{令 } A = \sqrt[3]{a_1^3 + a_2^3}, B = \sqrt[3]{b_1^3 + b_2^3}, C = \sqrt[3]{c_1^3 + c_2^3}.$$

$$\begin{aligned} & \frac{a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2}{\sqrt[3]{a_1^3 + a_2^3} \sqrt[3]{b_1^3 + b_2^3} \sqrt[3]{c_1^3 + c_2^3}} \\ &= \frac{a_1 b_1 c_1}{ABC} + \frac{a_2 b_2 c_2}{ABC} \\ &= \frac{a_1}{A} \cdot \frac{b_1}{B} \cdot \frac{c_1}{C} + \frac{a_2}{A} \cdot \frac{b_2}{B} \cdot \frac{c_2}{C} \\ &\leq \frac{1}{3} \left(\frac{a_1^3}{A^3} + \frac{b_1^3}{B^3} + \frac{c_1^3}{C^3} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{a_2^3}{A^3} + \frac{b_2^3}{B^3} + \frac{c_2^3}{C^3} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{a_1^3 + a_2^3}{A^3} + \frac{b_1^3 + b_2^3}{B^3} + \frac{c_1^3 + c_2^3}{C^3} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

故

$$(a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2)^3 \leq (a_1^3 + a_2^3)(b_1^3 + b_2^3)(c_1^3 + c_2^3)$$

得证.

.....本步骤 6 分, 累计 14 分

20. (16 分) 公元 2222 年, 有一种高危传染疾病在全球范围内蔓延, 被感染者的潜伏期可以长达 10 年, 期间会有约 0.05% 的概率传染给他人, 一旦发病三天内即死亡。某城市总人口约 200 万人, 专家分析其中约有 1000 名感染者, 为了防止疾病继续扩散, 疾病预防控制中心现决定对全市人口进行血液检测以筛选出被感染者。由于检测试剂十分昂贵且数量有限, 需要将血样混合后一起检测以节约试剂。已知感染者的检测结果为阳性, 未被感染者则为阴性。阳性血样与阴性血样混合后的检测结果为阳性, 同为阴性或阳性的血样混合后结果不发生改变。

- (1) (0 分) 若对全市人口进行平均分组, 同一分组的血样将被混合到一起检测, 若发现结果为阳性, 则再在该分组内逐个检测排查。设每个组 x 个人, 那么最坏情况下, 需要进行约多少次检测可以找到所有的被感染者? 在当前方案下, 若要使检测的次数尽可能少, 每个分组的最优人数是?
- (2) (0 分) 在 (1) 的检测方案中, 对于检测结果为阳性的组采取逐一检测排查的方法并不是很好, 或可将这些组的血样再进行一次分组混合血样检测, 然后再进行逐一排查。仍然考虑最坏的情况, 请问两次要如何分组, 使检测总次数尽可能少?
- (3) (0 分) 在 (2) 的检测方案中, 进行了两次分组混合血样检测。仍然考虑最坏情况, 若再进行若干次分组混合血样检测, 是否会使检测次数更少? 请给出最优的检测方案。

解法一

设需要进行 y 次检测。由每个组 x 个人, 则有 $\frac{2000000}{x}$ 个小组, 最坏情况是 1000 人被分配到了不同的组。

$$y = \begin{cases} \frac{2 \cdot 10^6}{x} + 2 \cdot 10^6, & x \geq 2000 \\ \frac{2 \cdot 10^6}{x} + 1000 \cdot x, & x < 2000 \end{cases}$$

(题目要求近似计算, 可以不考虑整除, 考虑整除不扣分)

.....本步骤 2 分, 累计 2 分
分组数小于 1000 的情况比逐个检测还要多, 可以不用考虑,

$$y = \frac{2 \times 10^6}{x} + 1000 \cdot x \geq 2\sqrt{2 \cdot 10^9}.$$

当 $x = \sqrt{2 \times 10^3} \approx 45$ 人, 检测次数最少。

(结果为 44-45 都给分)

.....本步骤 2 分, 累计 4 分

(2) 设第二次分组每个组 w 人.

$$\begin{aligned} y &= \frac{2 \times 10^6}{x} + \frac{1000x}{w} + 1000w \\ &\geq 3\sqrt[3]{2 \times 10^{12}} \end{aligned}$$

当 $\frac{2 \times 10^6}{x} = \frac{1000x}{w} = 1000w$ 时, 即 $x = 2000^{\frac{2}{3}} \approx 159, w = 2000^{\frac{1}{3}} \approx 13$, 检测次数最少.

所以第一次分组 159 人一组, 第二次分组 13 人一组.

(也可以用两次基本不等式求得, 允许 10% 的误差.)

.....本步骤 6 分, 累计 10 分

(3) 若进行 k 次分组, 设第 i 次分组时每组人数为 x_i . 则总的检测次数为:

$$\begin{aligned} y &= \frac{2 \times 10^6}{x_1} + \frac{1000x_1}{x_2} + \cdots \\ &\quad + \frac{1000x_{k-1}}{x_k} + 1000x_k \\ &\geq (k+1) \sqrt[k+1]{2 \times 10^{3k+2}} \end{aligned}$$

利用计算器可得,

1 次分组, $y \geq 2\sqrt{2 \cdot 10^9} \approx 8.94 \times 10^4$;

2 次分组, $y \geq 3\sqrt[3]{2 \cdot 10^{12}} \approx 3.78 \times 10^4$;

3 次分组, $y \geq 4\sqrt[4]{2 \cdot 10^{15}} \approx 2.68 \times 10^4$;

4 次分组, $y \geq 5\sqrt[5]{2 \cdot 10^{18}} \approx 2.29 \times 10^4$;

5 次分组, $y \geq 6\sqrt[6]{2 \cdot 10^{21}} \approx 2.13 \times 10^4$;

6 次分组, $y \geq 7\sqrt[7]{2 \cdot 10^{24}} \approx 2.073 \times 10^4$;

7 次分组, $y \geq 8\sqrt[8]{2 \cdot 10^{27}} \approx 2.068 \times 10^4$;

8 次分组, $y \geq 9\sqrt[9]{2 \cdot 10^{30}} \approx 2.094 \times 10^4$;

9 次分组, $y \geq 10\sqrt[10]{2 \cdot 10^{33}} \approx 2.138 \times 10^4$;

可见进行 7 次分组混合血样检测最优.

其中第 k 次分组时 $(2000)^{\frac{8-k}{8}}$ 人一组.

.....本步骤 6 分, 累计 16 分

21. (18分) 已知函数 $f(x) = ax^2 - \frac{1}{2}x + c$ ($a, c \in R$), 满足 $f(1) = 0$, 且 $f(x) \geq 0$ 在 $x \in R$ 时恒成立.

(1) (0分) 求 a, c 的值;

(2) (0分) 若 $h(x) = \frac{3}{4}x^2 - bx + \frac{b}{2} - \frac{1}{4}$, 解不等式 $f(x) + h(x) < 0$;

(3) (0分) 是否存在实数 m , 使函数 $g(x) = f(x) - mx$ 在区间 $[m, m+2]$ 上有最小值 -5 ? 若存在, 请求出 m 的值; 若不存在, 请说明理由.

解法一

由 $f(1) = 0$, 得 $a + c = \frac{1}{2}$,

.....本步骤 1 分, 累计 1 分

因为 $f(x) \geq 0$ 在 $x \in R$ 时恒成立, 所以 $a > 0$ 且 $\Delta = \frac{1}{4} - 4ac \leq 0, ac \geq \frac{1}{16}$,

.....本步骤 1 分, 累计 2 分

即 $a(\frac{1}{2} - a) \geq \frac{1}{16}, a^2 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{16} \leq 0, (a - \frac{1}{4})^2 \leq 0$, 所以 $a = c = \frac{1}{4}$.

.....本步骤 2 分, 累计 4 分

(2) 由(1)得 $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$, 由 $f(x) + h(x) < 0$, 得 $x^2 - (b + \frac{1}{2})x + \frac{b}{2} < 0$, 即 $(x - b)(x - \frac{1}{2}) < 0$,

.....本步骤 3 分, 累计 7 分

所以, 当 $b < \frac{1}{2}$ 时, 原不等式解集为 $(b, \frac{1}{2})$; 当 $b > \frac{1}{2}$ 时, 原不等式解集为 $(\frac{1}{2}, b)$; 当 $b = \frac{1}{2}$ 时, 原不等式解集为空集.

.....本步骤 3 分, 累计 10 分

(3) $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - (\frac{1}{2} + m)x + \frac{1}{4}$,

.....本步骤 1 分, 累计 11 分

$g(x)$ 的图像是开口向上的抛物线, 对称轴为直线 $x = 2m + 1$. 假设存在实数 m , 使函数 $g(x)$ 在区间 $[m, m+2]$ 上有最小值 -5 . ① 当 $2m + 1 < m$, 即 $m < -1$ 时, 函数 $g(x)$ 在区间 $[m, m+2]$ 上是增函数, 所以 $g(m) = -5$, 即 $\frac{1}{4}m^2 - (\frac{1}{2} + m)m + \frac{1}{4} = -5$, 解得 $m = -3$ 或 $m = \frac{7}{3}$, 因为 $m < -1$, 所以 $m = -3$;

.....本步骤 2 分, 累计 13 分

② 当 $m \leq 2m + 1 \leq m + 2$, 即 $-1 \leq m \leq 1$ 时, 函数 $g(x)$ 的最小值为 $g(2m + 1) = -5$, 即 $\frac{1}{4}(2m + 1)^2 - (\frac{1}{2} + m)(2m + 1) + \frac{1}{4} = -5$, 解得 $m = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{21}}{2}$ 或 $m = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2}$, 均舍去;

.....本步骤 2 分, 累计 15 分

③当 $2m + 1 > m + 2$, 即 $m > 1$ 时, $g(x)$ 在区间 $[m, m + 2]$ 上是减函数, 所以 $g(m + 2) = -5$, 即 $\frac{1}{4}(m + 2)^2 - (\frac{1}{2} + m)(m + 2) + \frac{1}{4} = -5$, 解得 $m = -1 - 2\sqrt{2}$ 或 $m = -1 + 2\sqrt{2}$, 因 $m > 1$, 所以 $m = -1 + 2\sqrt{2}$.

.....本步骤 2 分, 累计 17 分

综上, 存在实数 m , $m = -3$ 或 $m = -1 + 2\sqrt{2}$ 时, 函数 $g(x)$ 在区间 $[m, m + 2]$ 上有最小值 -5 .

.....本步骤 1 分, 累计 18 分