



**UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL MAULE**  
**FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA**  
**ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL**

**“PROYECTO DE TÍTULO”**

**NOMBRE (S) ALUMNO(S)**

**PROFESOR GUÍA: NOMBRE PROFESOR**

Proyecto de Título presentado en conformidad a los requisitos para obtener el título de  
Ingeniero Civil

TALCA, MES 202X



**UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL MAULE**  
**FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA**  
**ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL**

Proyecto de Título presentado en conformidad a los requisitos para obtener el título de  
Ingeniero Civil

**“PROYECTO DE TÍTULO”**

**NOMBRE (S) ALUMNO(S)**

**PROFESOR GUÍA: NOMBRE PROFESOR**

**COMISIÓN EXAMINADORA**

**FIRMA**

Dr. / Mg. XX

\_\_\_\_\_  
PROFESOR DE COMISIÓN EXTERNA

Dr. / Mg. XX

\_\_\_\_\_  
PROFESOR DE COMISIÓN EXTERNA

Dr. / Mg. XX

\_\_\_\_\_  
PROFESOR DE COMISIÓN INTERNA

NOTA FINAL EXAMEN DE TÍTULO

\_\_\_\_\_

TALCA, MES 20XX

# Resumen

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

# Abstract

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

# Agradecimientos

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>I</b>
<b>Abstract</b>	<b>II</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>VI</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>VII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Thesis organization and formatting . . . . .	1
1.1.1. This is a subsection . . . . .	2
1.1.1.1. This is a sub-subsection . . . . .	2
1.1.1.2. This is another sub-subsection . . . . .	2
1.2. Figures and tables . . . . .	2
1.3. Cross-references . . . . .	3
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>5</b>
2.1. Introduction . . . . .	5
2.2. Socio-economic aspects . . . . .	5
2.3. The user perspective . . . . .	5
2.4. Development process . . . . .	5
<b>3. Materiales y Métodos</b>	<b>6</b>

3.1. Reflection . . . . .	6
<b>4. Análisis y Resultados</b>	<b>8</b>
4.1. System design and architecture . . . . .	8
4.2. Technical solution . . . . .	8
4.3. Evaluation . . . . .	8
<b>5. Conclusiones</b>	<b>9</b>
5.1. Reflection . . . . .	9
5.2. Conclusion . . . . .	12
<b>Bibliografía</b>	<b>15</b>
<b>Anexos</b>	<b>16</b>
<b>I. Series de Fourier</b>	<b>17</b>
I.1. Série de Fourier . . . . .	17
I.2. Forma Complexa da Série de Fourier . . . . .	17
I.3. Série de Fourier na circunferência unitária . . . . .	19
I.4. A Transformada de Fourier . . . . .	20
I.5. Generalização da transformada de Fourier . . . . .	20
I.6. System design . . . . .	21
I.7. Technical solutions . . . . .	21
I.8. Testing . . . . .	21
<b>II. Series de Taylor</b>	<b>22</b>
II.1. System design . . . . .	22
II.2. Technical solutions . . . . .	22
II.3. Testing . . . . .	22

# Índice de figuras

1.1. This is a sample figure. Image source: Overleaf (2023) . . . . .	3
---	---



# Índice de tablas

1.1. This is how you make a table. . . . .	3
--	---

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Thesis organization and formatting

It is required that the thesis be written in either American or British English, but not a combination of the two. In order to pass, the English used in the thesis must be understandable and not so poor as to impede reading. The use of grammar-checking tools such as Grammarly<sup>1</sup> is highly recommended. Footnotes should be used for clarifying comments, rather than references.

A few observations and recommendations about the organization of the thesis and the writing process:

- Note that the headings used in this template are generic, make your own more informative headings.
- You can change the order of sections: write them in an order that feels natural and does not require too many forward pointers.
- You can join or split sections.
- The order in which you write the thesis is usually not the order of sections in the report. Write as you work on the project – a paragraph draft or a page at a time – and put things into place later.
- The deliverables force you to get started on this writing.

---

<sup>1</sup>To install a Grammarly browser extension, you can this link <https://app.grammarly.com/>

- Anything that refers to code (source files, settings files, etc.) usually belongs in an appendix.
- Extensive screenshots or use–case diagrams belong in an appendix.
- For smaller teams, feel free to scale down whichever aspects are less interesting for your project.

### 1.1.1. This is a subsection

Numbered (ordered) lists are easy to create in  $\LaTeX$ :

1. Items are numbered automatically.
2. The numbers start at 1 with each use of the `enumerate` environment.
3. Another entry in the list

#### 1.1.1.1. This is a sub-subsection

You can add a sub-subsection using `\subsubsection{heading}` command.

#### 1.1.1.2. This is another sub-subsection

## 1.2. Figures and tables

Figures may be included using the command, `\includegraphics` in combination with or without its several options to further control graphics.  $\LaTeX$  accepts figures in the postscript format while  $\text{pdf}\LaTeX$  accepts \*.pdf, \*.mps (metapost), \*.jpg and \*.png formats<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>For more detail see [https://www.overleaf.com/learn/latex/Inserting\\_Images](https://www.overleaf.com/learn/latex/Inserting_Images)



Figura 1.1: This is a sample figure. Image source: [Overleaf \(2023\)](#)

The `table` environment is handy for marking up tabular material. Each table must have a caption and it should be placed *above* the table <sup>3</sup>.

Tabla 1.1: This is how you make a table.

	<b>parameter</b>	<b>type 1</b>	<b>type 2</b>
$k_0$	something	$x$	$y$
$k_0$	other thing	$E = mc^2$	$z$
$\tau$	exponent	2	3

### 1.3. Cross-references

Thesis documents may be internally hyperlinked. Hyperlinks are generated from proper cross-references in the thesis. Different types of cross-referencing are possible in  $\LaTeX$ :

**Chapters:** See for example Chapter.

**Sections:** See for example Section 1.2 and Subsection 1.1.1.1.

**Formulae:** According to Equation (1.1), the energy of a system is equal to its mass times the speed of light squared.

---

<sup>3</sup>For more examples visit <https://www.overleaf.com/learn/latex/Tables>

**Figures and tables:** For example see Figure 1.1 and Table 1.1.

**Literature references:** References must be added manually to the `references.bib` file. Define a unique key for each reference and use command `\cite{key}` for citation. For example:

- See the bachelor thesis written by Brink et al. [Brink et al. \(2021\)](#).
- The source code of this algorithm can be found in [Brink et al. \(2021\)](#); [Smith et al. \(2023\)](#).

$$E = mc^2 \tag{1.1}$$

# **Capítulo 2**

## **Marco Teórico**

**2.1. Introduction**

**2.2. Socio-economic aspects**

**2.3. The user perspective**

**2.4. Development process**

# Capítulo 3

## Materiales y Métodos

### 3.1. Reflection

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a,

molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.



# **Capítulo 4**

## **Análisis y Resultados**

**4.1. System design and architecture**

**4.2. Technical solution**

**4.3. Evaluation**

# Capítulo 5

## Conclusiones

### 5.1. Reflection

Cras egestas ipsum a nisl. Vivamus varius dolor ut dolor. Fusce vel enim. Pellentesque accumsan ligula et eros. Cras id lacus non tortor facilisis facilisis. Etiam nisl elit, cursus sed, fringilla in, congue nec, urna. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Integer at turpis. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Duis fringilla, ligula sed porta fringilla, ligula wisi commodo felis, ut adipiscing felis dui in enim. Suspendisse malesuada ultrices ante. Pellentesque scelerisque augue sit amet urna. Nulla volutpat aliquet tortor. Cras aliquam, tellus at aliquet pellentesque, justo sapien commodo leo, id rhoncus sapien quam at erat. Nulla commodo, wisi eget sollicitudin pretium, orci orci aliquam orci, ut cursus turpis justo et lacus. Nulla vel tortor. Quisque erat elit, viverra sit amet, sagittis eget, porta sit amet, lacus.

In hac habitasse platea dictumst. Proin at est. Curabitur tempus vulputate elit. Pellentesque sem. Praesent eu sapien. Duis elit magna, aliquet at, tempus sed, vehicula non, enim. Morbi viverra arcu nec purus. Vivamus fringilla, enim et commodo malesuada, tortor metus elementum ligula, nec aliquet est sapien ut lectus. Aliquam mi. Ut nec elit. Fusce euismod luctus tellus. Curabitur scelerisque. Nullam purus. Nam ultricies accumsan magna. Morbi pulvinar lorem sit amet ipsum. Donec ut justo vitae nibh mollis congue. Fusce quis diam. Praesent tempus eros ut quam.

Donec in nisl. Fusce vitae est. Vivamus ante ante, mattis laoreet, posuere eget, congue vel,

nunc. Fusce sem. Nam vel orci eu eros viverra luctus. Pellentesque sit amet augue. Nunc sit amet ipsum et lacus varius nonummy. Integer rutrum sem eget wisi. Aenean eu sapien. Quisque ornare dignissim mi. Duis a urna vel risus pharetra imperdiet. Suspendisse potenti.

Morbi justo. Aenean nec dolor. In hac habitasse platea dictumst. Proin nonummy porttitor velit. Sed sit amet leo nec metus rhoncus varius. Cras ante. Vestibulum commodo sem tincidunt massa. Nam justo. Aenean luctus, felis et condimentum lacinia, lectus enim pulvinar purus, non porta velit nisl sed eros. Suspendisse consequat. Mauris a dui et tortor mattis pretium. Sed nulla metus, volutpat id, aliquam eget, ullamcorper ut, ipsum. Morbi eu nunc. Praesent pretium. Duis aliquam pulvinar ligula. Ut blandit egestas justo. Quisque posuere metus viverra pede.

Vivamus sodales elementum neque. Vivamus dignissim accumsan neque. Sed at enim. Vestibulum nonummy interdum purus. Mauris ornare velit id nibh pretium ultricies. Fusce tempor pellentesque odio. Vivamus augue purus, laoreet in, scelerisque vel, commodo id, wisi. Duis enim. Nulla interdum, nunc eu semper eleifend, enim dolor pretium elit, ut commodo ligula nisl a est. Vivamus ante. Nulla leo massa, posuere nec, volutpat vitae, rhoncus eu, magna.

Quisque facilisis auctor sapien. Pellentesque gravida hendrerit lectus. Mauris rutrum sodales sapien. Fusce hendrerit sem vel lorem. Integer pellentesque massa vel augue. Integer elit tortor, feugiat quis, sagittis et, ornare non, lacus. Vestibulum posuere pellentesque eros. Quisque venenatis ipsum dictum nulla. Aliquam quis quam non metus eleifend interdum. Nam eget sapien ac mauris malesuada adipiscing. Etiam eleifend neque sed quam. Nulla facilisi. Proin a ligula. Sed id dui eu nibh egestas tincidunt. Suspendisse arcu.

Maecenas dui. Aliquam volutpat auctor lorem. Cras placerat est vitae lectus. Curabitur massa lectus, rutrum euismod, dignissim ut, dapibus a, odio. Ut eros erat, vulputate ut, interdum non, porta eu, erat. Cras fermentum, felis in porta congue, velit leo facilisis odio, vitae consectetur lorem quam vitae orci. Sed ultrices, pede eu placerat auctor, ante ligula rutrum tellus, vel posuere nibh lacus nec nibh. Maecenas laoreet dolor at enim. Donec molestie dolor nec metus. Vestibulum libero. Sed quis erat. Sed tristique. Duis pede leo, fermentum quis, consectetur eget, vulputate sit amet, erat.

Donec vitae velit. Suspendisse porta fermentum mauris. Ut vel nunc non mauris pharetra varius. Duis consequat libero quis urna. Maecenas at ante. Vivamus varius, wisi sed egestas tristique, odio wisi luctus nulla, lobortis dictum dolor ligula in lacus. Vivamus aliquam, urna

sed interdum porttitor, metus orci interdum odio, sit amet euismod lectus felis et leo. Praesent ac wisi. Nam suscipit vestibulum sem. Praesent eu ipsum vitae pede cursus venenatis. Duis sed odio. Vestibulum eleifend. Nulla ut massa. Proin rutrum mattis sapien. Curabitur dictum gravida ante.

Phasellus placerat vulputate quam. Maecenas at tellus. Pellentesque neque diam, dignissim ac, venenatis vitae, consequat ut, lacus. Nam nibh. Vestibulum fringilla arcu mollis arcu. Sed et turpis. Donec sem tellus, volutpat et, varius eu, commodo sed, lectus. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Quisque enim arcu, suscipit nec, tempus at, imperdiet vel, metus. Morbi volutpat purus at erat. Donec dignissim, sem id semper tempus, nibh massa eleifend turpis, sed pellentesque wisi purus sed libero. Nullam lobortis tortor vel risus. Pellentesque consequat nulla eu tellus. Donec velit. Aliquam fermentum, wisi ac rhoncus iaculis, tellus nunc malesuada orci, quis volutpat dui magna id mi. Nunc vel ante. Duis vitae lacus. Cras nec ipsum.

Morbi nunc. Aliquam consectetur varius nulla. Phasellus eros. Cras dapibus porttitor risus. Maecenas ultrices mi sed diam. Praesent gravida velit at elit vehicula porttitor. Phasellus nisl mi, sagittis ac, pulvinar id, gravida sit amet, erat. Vestibulum est. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Curabitur id sem elementum leo rutrum hendrerit. Ut at mi. Donec tincidunt faucibus massa. Sed turpis quam, sollicitudin a, hendrerit eget, pretium ut, nisl. Duis hendrerit ligula. Nunc pulvinar congue urna.

Nunc velit. Nullam elit sapien, eleifend eu, commodo nec, semper sit amet, elit. Nulla lectus risus, condimentum ut, laoreet eget, viverra nec, odio. Proin lobortis. Curabitur dictum arcu vel wisi. Cras id nulla venenatis tortor congue ultrices. Pellentesque eget pede. Sed eleifend sagittis elit. Nam sed tellus sit amet lectus ullamcorper tristique. Mauris enim sem, tristique eu, accumsan at, scelerisque vulputate, neque. Quisque lacus. Donec et ipsum sit amet elit nonummy aliquet. Sed viverra nisl at sem. Nam diam. Mauris ut dolor. Curabitur ornare tortor cursus velit.

Morbi tincidunt posuere arcu. Cras venenatis est vitae dolor. Vivamus scelerisque semper mi. Donec ipsum arcu, consequat scelerisque, viverra id, dictum at, metus. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut pede sem, tempus ut, porttitor bibendum, molestie eu, elit. Suspendisse potenti. Sed id lectus sit amet purus faucibus vehicula. Praesent sed sem non dui pharetra interdum. Nam viverra ultrices magna.

Aenean laoreet aliquam orci. Nunc interdum elementum urna. Quisque erat. Nullam tempor

neque. Maecenas velit nibh, scelerisque a, consequat ut, viverra in, enim. Duis magna. Donec odio neque, tristique et, tincidunt eu, rhoncus ac, nunc. Mauris malesuada malesuada elit. Etiam lacus mauris, pretium vel, blandit in, ultricies id, libero. Phasellus bibendum erat ut diam. In congue imperdiet lectus.

Aenean scelerisque. Fusce pretium porttitor lorem. In hac habitasse platea dictumst. Nulla sit amet nisl at sapien egestas pretium. Nunc non tellus. Vivamus aliquet. Nam adipiscing euismod dolor. Aliquam erat volutpat. Nulla ut ipsum. Quisque tincidunt auctor augue. Nunc imperdiet ipsum eget elit. Aliquam quam leo, consectetur non, ornare sit amet, tristique quis, felis. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Pellentesque interdum quam sit amet mi. Pellentesque mauris dui, dictum a, adipiscing ac, fermentum sit amet, lorem.

Ut quis wisi. Praesent quis massa. Vivamus egestas risus eget lacus. Nunc tincidunt, risus quis bibendum facilisis, lorem purus rutrum neque, nec porta tortor urna quis orci. Aenean aliquet, libero semper volutpat luctus, pede erat lacinia augue, quis rutrum sem ipsum sit amet pede. Vestibulum aliquet, nibh sed iaculis sagittis, odio dolor blandit augue, eget mollis urna tellus id tellus. Aenean aliquet aliquam nunc. Nulla ultricies justo eget orci. Phasellus tristique fermentum leo. Sed massa metus, sagittis ut, semper ut, pharetra vel, erat. Aliquam quam turpis, egestas vel, elementum in, egestas sit amet, lorem. Duis convallis, wisi sit amet mollis molestie, libero mauris porta dui, vitae aliquam arcu turpis ac sem. Aliquam aliquet dapibus metus.

## 5.2. Conclusion

Quisque facilisis auctor sapien. Pellentesque gravida hendrerit lectus. Mauris rutrum sodales sapien. Fusce hendrerit sem vel lorem. Integer pellentesque massa vel augue. Integer elit tortor, feugiat quis, sagittis et, ornare non, lacus. Vestibulum posuere pellentesque eros. Quisque venenatis ipsum dictum nulla. Aliquam quis quam non metus eleifend interdum. Nam eget sapien ac mauris malesuada adipiscing. Etiam eleifend neque sed quam. Nulla facilisi. Proin a ligula. Sed id dui eu nibh egestas tincidunt. Suspendisse arcu.

Maecenas dui. Aliquam volutpat auctor lorem. Cras placerat est vitae lectus. Curabitur massa lectus, rutrum euismod, dignissim ut, dapibus a, odio. Ut eros erat, vulputate ut, interdum non,

porta eu, erat. Cras fermentum, felis in porta congue, velit leo facilisis odio, vitae consecetur lorem quam vitae orci. Sed ultrices, pede eu placerat auctor, ante ligula rutrum tellus, vel posuere nibh lacus nec nibh. Maecenas laoreet dolor at enim. Donec molestie dolor nec metus. Vestibulum libero. Sed quis erat. Sed tristique. Duis pede leo, fermentum quis, consecetur eget, vulputate sit amet, erat.

Donec vitae velit. Suspendisse porta fermentum mauris. Ut vel nunc non mauris pharetra varius. Duis consequat libero quis urna. Maecenas at ante. Vivamus varius, wisi sed egestas tristique, odio wisi luctus nulla, lobortis dictum dolor ligula in lacus. Vivamus aliquam, urna sed interdum porttitor, metus orci interdum odio, sit amet euismod lectus felis et leo. Praesent ac wisi. Nam suscipit vestibulum sem. Praesent eu ipsum vitae pede cursus venenatis. Duis sed odio. Vestibulum eleifend. Nulla ut massa. Proin rutrum mattis sapien. Curabitur dictum gravida ante.

Phasellus placerat vulputate quam. Maecenas at tellus. Pellentesque neque diam, dignissim ac, venenatis vitae, consequat ut, lacus. Nam nibh. Vestibulum fringilla arcu mollis arcu. Sed et turpis. Donec sem tellus, volutpat et, varius eu, commodo sed, lectus. Lorem ipsum dolor sit amet, consecetur adipiscing elit. Quisque enim arcu, suscipit nec, tempus at, imperdiet vel, metus. Morbi volutpat purus at erat. Donec dignissim, sem id semper tempus, nibh massa eleifend turpis, sed pellentesque wisi purus sed libero. Nullam lobortis tortor vel risus. Pellentesque consequat nulla eu tellus. Donec velit. Aliquam fermentum, wisi ac rhoncus iaculis, tellus nunc malesuada orci, quis volutpat dui magna id mi. Nunc vel ante. Duis vitae lacus. Cras nec ipsum.

Morbi nunc. Aliquam consecetur varius nulla. Phasellus eros. Cras dapibus porttitor risus. Maecenas ultrices mi sed diam. Praesent gravida velit at elit vehicula porttitor. Phasellus nisl mi, sagittis ac, pulvinar id, gravida sit amet, erat. Vestibulum est. Lorem ipsum dolor sit amet, consecetur adipiscing elit. Curabitur id sem elementum leo rutrum hendrerit. Ut at mi. Donec tincidunt faucibus massa. Sed turpis quam, sollicitudin a, hendrerit eget, pretium ut, nisl. Duis hendrerit ligula. Nunc pulvinar congue urna.

Nunc velit. Nullam elit sapien, eleifend eu, commodo nec, semper sit amet, elit. Nulla lectus risus, condimentum ut, laoreet eget, viverra nec, odio. Proin lobortis. Curabitur dictum arcu vel wisi. Cras id nulla venenatis tortor congue ultrices. Pellentesque eget pede. Sed eleifend sagittis elit. Nam sed tellus sit amet lectus ullamcorper tristique. Mauris enim sem, tristique eu, accumsan

at, scelerisque vulputate, neque. Quisque lacus. Donec et ipsum sit amet elit nonummy aliquet. Sed viverra nisl at sem. Nam diam. Mauris ut dolor. Curabitur ornare tortor cursus velit.

# Bibliografía

Brink, F., Hellstrom, J., and Nordlander, S. (2021). *Book Buddies: The Development of a Book Club Application*. Bachelor thesis, Uppsala University, Uppsala, Sweden.

Overleaf (2023). Inserting images. [https://cs.overleaf.com/learn/latex/Inserting\\_Images](https://cs.overleaf.com/learn/latex/Inserting_Images). Accessed: April 19, 2023.

Smith, J., Doe, J., and Brown, D. (2023). A study of lorem ipsum. *Journal of Placeholder Text*, 12(3):45–67.



# **Anexos**

# Anexo I

## Séries de Fourier

### I.1. Série de Fourier

Começamos por definir a série de Fourier. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica de período  $2L$ , integrável em valor absoluto. A série de Fourier de  $f$  é dada por:

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{nx\pi}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{nx\pi}{L}\right) \right)$$

Onde  $a_n$  e  $b_n$  para  $\forall n \in \mathbb{N}$  são dados por:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{nx\pi}{L}\right) dx$$

e

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{nx\pi}{L}\right) dx$$

Calcula-se  $a_0$  fazendo:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

### I.2. Forma Complexa da Série de Fourier

Sabemos da fórmula de Euler que

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Como consequência, temos

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Utilizando estas identidades, podemos reescrever a série de Fourier e os integrais que definem os termos da série. Os novos termos serão os  $c_n$  obtidos abaixo. Para  $n \geq 0$ :

$$c_n = \frac{a_n}{2} - i \frac{b_n}{2} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \left[ \cos\left(-\frac{nx\pi}{L}\right) + i \sin\left(-\frac{nx\pi}{L}\right) \right] dx$$

Para  $n < 0$ :

$$c_n = \frac{a_n}{2} + i \frac{b_n}{2} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \left[ \cos\left(-\frac{nx\pi}{L}\right) + i \sin\left(-\frac{nx\pi}{L}\right) \right] dx$$

Como

$$\cos\left(-\frac{nx\pi}{L}\right) + i \sin\left(-\frac{nx\pi}{L}\right) = e^{-i\frac{nx\pi}{L}}$$

Definimos uma única fórmula para os  $c_n$  com  $n \in \mathbb{Z}$ , isto é:

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\frac{nx\pi}{L}} dx$$

A série de Fourier é agora

$$f \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{nx\pi}{L}}$$

Repare-se que, apesar da série ter termos complexos, uma função real de variável real apresenta apenas termos reais (graças às propriedades da exponencial complexa). No entanto, torna-se possível admitir funções  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  com  $f(x) = u(x) + iv(x)$ .

Em análise de Fourier é frequente utilizar-se o símbolo  $\hat{f}(n) \in \mathbb{C}$  para representar os  $c_n$  definidos acima.

Olhemos agora para uma restrição de  $f$  em  $[-L, L]$ . Podemos fazer uma identificação entre os valores de  $x \in [-L, L]$  e cada  $x' = x + 2L$ , uma vez que  $f(x) = f(x + 2L)$ , por definição da função. Obtém-se, assim, uma relação de equivalência  $f(x) \equiv f(x + 2L)$  e  $f$  passa a ser  $f: \frac{\mathbb{R}}{2L\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{C}$ . De uma função definida em  $\mathbb{R}$  passamos para uma função definida numa circunferência de perímetro  $2L$ .

Geralmente é utilizado o período  $2\pi$ , isto é,  $L = \pi$ , de onde segue que uma função é tal que  $f : \mathbb{R} \text{ mód } 2\pi \rightarrow \mathbb{C}$ . A  $\mathbb{R} \text{ mód } 2\pi$  também é chamado toro uni-dimensional,  $\mathbb{T}$ , cuja notação irei preferir. Assim, para uma função definida em  $[-\pi, \pi]$

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{inx}$$

Onde

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x)e^{-inx} dx$$

Nas próximas secções, as funções utilizadas serão definidas para o intervalo  $[-\pi, \pi]$ , uma vez que esse intervalo facilitará os cálculos.

### I.3. Série de Fourier na circunferência unitária

Define-se agora um isomorfismo  $\phi$  entre  $\mathbb{T}$  e a circunferência unitária em  $\mathbb{C}$ .

Seja  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  a circunferência unitária.  $\{\mathbb{T}, +\}$  e  $\{S^1, \times\}$  são grupos abelianos, e  $\phi : \mathbb{T} \rightarrow S^1$ , onde  $\phi(x) = e^{ix}$ .

Usando  $L = \pi$  para cada  $x, y \in [-2\pi, 2\pi]$ , a sua soma corresponde a adicionar ângulos em  $S^1$ .

Note-se que definiu-se  $\phi(x) = e^{inx}$  para  $n=1$ . Se  $n \neq 1$ , temos apenas um homomorfismo, uma vez que a aplicação deixará de ser bijectiva.

Estes homomorfismos são também chamados caracteres, uma vez que são a representação do grupo  $\{\mathbb{T}, +\}$  usando funções complexas.

Definimos ainda um produto interno em  $\mathbb{T}$  para duas funções  $f$  e  $g$ , de forma a satisfazer  $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$  e ter a propriedades de produto interno. Então:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x)\overline{g(x)} dx$$

É fácil ver ainda que para  $n, m \in \mathbb{Z}$ :

$$\langle e^{inx}, e^{imx} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} e^{inx}e^{-imx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} e^{i(n-m)x} dx$$

Calculando o integral, vemos que as funções  $e_n(x) = e^{inx}$  formam uma base ortonormada, uma vez que:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} e^{i(n-m)x} dx = \begin{cases} 1 & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m \neq n \end{cases}$$

Assim, os termos da série de Fourier são

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-inx} dx = \langle f, e^{inx} \rangle$$

Ao considerarmos os coeficientes da série de Fourier como o produto interno entre  $f$  e uma base ortonormada motiva-se o facto da transformada de Fourier funcionar em  $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{Z}$ . O mesmo já não acontece quando estendemos a transformada para  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^n$ , uma vez que uma qualquer variante de  $e_n(x) = e^{inx}$  não funciona como base nesses dois casos.

## I.4. A Transformada de Fourier

Na passagem do toro uni-dimensional  $\mathbb{T}, +$  para  $\mathbb{Z}, +$ , os termos  $\hat{f}(n)$  constituem efectivamente uma transformada de Fourier. Olhando para  $\hat{f}(n)$  não como coeficientes, mas como uma transformação de funções periódicas para sucessões, podemos definir a transformada de Fourier para este caso específico.

**Definição:** Dada uma função  $f$  em  $\{\mathbb{T}, +\}$ ,  $f \in L^1(\mathbb{T})$ , definimos a sua transformada de Fourier,  $\mathcal{F}$ , como

$$\mathcal{F}(f)(n) = \hat{f}(n) = \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-inx} dx, \quad \hat{f}(n) \in \{\mathbb{Z}, +\}$$

A inversa da transformada de Fourier,  $\mathcal{F}^{-1}$  é dada por

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(n) e^{inx}$$

## I.5. Generalização da transformada de Fourier

A passagem da transformada de Fourier para  $\mathbb{R}$  pode ser feita ”passando-a ao limite”, uma vez que, de forma não rigorosa, um somatório infinito poderá ser interpretado como um integral

impróprio, fazendo  $L \rightarrow \infty$ . Enquanto  $f \in L^1$ , podemos fazer a transformada de Fourier na mesma. Os caracteres são agora contínuos da forma  $e^{i\xi x} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{T}$ . Seja  $\xi = \frac{n\pi}{L}$ . A transformada de Fourier usando  $\xi$  é:

$$\mathcal{F}(f)(x) = \hat{f}(\xi) = \int_{-L}^L f(x)e^{-i\xi x} dx$$

Com  $L \rightarrow \infty$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx = \hat{f}(\xi)$$

Prossegue-se da mesma forma para a inversa:

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \frac{1}{2L} \sum_{-\infty}^{+\infty} 2L\hat{g}(n)e^{i\frac{n\pi}{L}x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\xi)e^{i\xi x} d\xi$$

Que são as expressões obtidas nas notas do seminário, a menos de  $\frac{1}{2\pi}$ . Podemos escrever a inversa da transformada como se encontra nas notas fazendo  $L = \frac{1}{2}$ , o que faria desaparecer a fracção no início e multiplicando o expoente da exponencial por  $2\pi$ .

Repare-se que apenas se  $g$  for somável é que podemos fazer a sua inversa. No entanto, note-se que a inversa poderá não ser  $L^1$ , aliás, essa é a regra geral. Dá-se agora um exemplo de uma transformada de Fourier.

**Exemplo:**

## I.6. System design

## I.7. Technical solutions

## I.8. Testing

## **Anexo II**

### **Series de Taylor**

**II.1. System design**

**II.2. Technical solutions**

**II.3. Testing**